6

ALAIN PILLER

PROBAS À DENSITÉ

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM. S

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Rappels utiles

1 Epreuve de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues** :

- « **succés** » avec une probabilité $\boldsymbol{p}$.
- « **échec** » avec une probabilité $(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$.

2 Schéma de Bernoulli :

Un schéma de Bernoulli est une succession d'épreuves de **Bernoulli**, **identiques** et **indépendantes** les unes des autres.

Notons que les tirages se font avec remise.

3 La loi binomiale :

La loi binomiale découle d'un schéma de Bernoulli. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir «$\boldsymbol{\kappa}$» **succés** sur «$\boldsymbol{n}$» **épreuves** indépendantes (ou avec remise) est :

$$\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=\kappa)=\binom{\boldsymbol{n}}{\kappa}\boldsymbol{p}^{\kappa}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{n}-\kappa}}.$$

Notons que : ▪ $\binom{n}{\kappa}=\dfrac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$,

▪ les n épreuves sont **indépendantes**, elles comportent chacune **deux issues** (succés, échec) et sont **identiques**.

4 ⊕ sur la loi binomiale :

ⓐ. **Notation** :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 30 \text{ et } p = 0,4\,.$$

On note : $\boldsymbol{X \rightsquigarrow B(n\ ;\ p)}$, cad $\boldsymbol{X \rightsquigarrow B(30\ ;\ 0,4)}$.

ⓑ. **Espérance et variance** :

Soit $X \rightsquigarrow B(n\ ;\ p)$: $\boxed{\boldsymbol{E(X) = n\,.\,p}}$ et $\boxed{\boldsymbol{V(X) = n\,.\,p.(1-p)}}$.

B Variable aléatoire continue

1 Définition :

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui, à chaque issue d'une expérience, associe un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$ tout entier.

2 Remarque 1 :

- En continue, $\leq$ et $<$ ou $\geq$ et $>$: c'est la même chose ! !

- Ainsi, l'événement la " variable aléatoire X est comprise entre ***a* et *b*** $(a, b \in \mathbb{R})$" s'écrit :

$$a \leq X \leq b$$
$$\text{ou } a < X < b$$
$$\text{ou } a \leq X < b$$
$$\text{ou } a < X \leq b.$$

- De plus :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b). \end{aligned}$$

3 Remarque 2 :

- En continu : $P(X = \kappa) = 0$, **always** !

C Densité de probabilité

1 Définition :

Une densité de probabilité sur $[a, b]$ est une fonction f définie, **continue**, **positive** sur $[a, b]$, et telle que : $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = 1}$.

2 Traduction :

f est une densité de probabilité sur $[a, b]$ ssi :

ⓐ. f est continue par morceaux (**ce sera toujours le cas, juste le dire**) ;

ⓑ. $\int_a^b f(x)dx = 1$;

ⓒ. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

3 Exemple :

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = 3x^2$.

Montrons que f est une densité de probabilité :

$f(x) = 3x^2$, $\forall x \in [0, 1]$ peut s'écrire : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

ⓐ. Ici, f est **continue par morceaux**.

ⓑ. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 3x^2 dx$

$= [x^3]_0^1$

$= 1$.

Nous avons donc bien : $\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx = 1}$.

ⓒ. ▪ si $x \in [0, 1]$, $f(x) = 3x^2 \geq 0$,

▪ si $x \notin [0, 1]$, $f(x) = 0 \geq 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$.

Au total, f est **bien une densité de probabilité sur $[0, 1]$**.

D Fonction de répartition

1 Définition :

Soit X une variable aléatoire continue. On appelle fonction de répartition de X, la fonction F, à valeurs dans $[0, 1]$, définie par :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) &= P(X \le x) \\ &= P(X < x) \\ &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt. \end{aligned}}$$

2 A quoi ça sert ?

Une fois que l'on a déterminé F, on est capable de calculer toutes les probabilités suivantes :

. $P(c \le X \le d) = F(d) - F(c)$
. $P(c < X < d) = F(d) - F(c)$
. $P(c \le X < d) = F(d) - F(c)$
. $P(c < X \le d) = F(d) - F(c)$
. $P(X \le d) = F(d)$
. $P(X < d) = F(d)$
. $P(X \ge d) = 1 - P(X \le d) = 1 - P(X < d)$
. $P(X > d) = 1 - P(X \le d) = 1 - P(X < d)$.

3 Exemple :

Soit X une variable aléatoire dont la densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{32}\ x(4-x) & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Calculons $\boldsymbol{P(1 \leq X < 3)}$:

ⓐ. **Rédaction 1** :

Soit F, la fonction de répartition de X.

Nous savons que : $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Distinguons 3 cas :

- si $x \leq 0$, $F(x) = 0$.
- si $x \in [0, 4]$, $$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{3}{32}\int_0^x (4t - t^2)dt = \frac{3}{32}\left[2t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32}.$$
- si $x \geq 4$, $F(x) = 1$.

Au total : $\boxed{\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{3x^2}{16} - \dfrac{x^3}{32} \text{ si } x \in [0, 4] \\ 1 \text{ si } x \geq 4 \end{cases}}}$.

Dans ces conditions :

$$P(1 \leq X < 3) = F(3) - F(1) = \left(\frac{3(3)^2}{16} - \frac{(3)^3}{32}\right) - \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{32}\right).$$

En résumé : $\boxed{\boldsymbol{P(1 \leq X < 3) = \frac{11}{16}}}$.

ⓑ. **Rédaction 2** :

Nous savons que : $P(1 \leq X < 3) = \int_1^3 f(x)dx$.

$$P(1 \leq X < 3) = \int_1^3 \frac{3}{32}\, x(4-x)dx$$
$$= \left[\frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right]_1^3 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{P(1 \leq X < 3) = \frac{11}{16}}}.$$

E Espérance mathématique

1 Définition et formule :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ est :

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \int_a^b x\, f(x)dx}}.$$

2 Autres formules de l'espérance :

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx}} \text{ (a)}$$

ou $\boxed{\boldsymbol{E(X) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b x\, f(x)dx}}$ (b)

ou $\boxed{\boldsymbol{E(X) = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b x\, f(x)dx}}$ (c).

3 Propriétés de l'espérance mathématique :

Soient X et Y deux variables aléatoires et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

. $E(aX + b) = aE(X) + b$,

. $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$.

F Loi uniforme sur $[a, b]$

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b] (a < b)$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a, b]$, de valeur : $\frac{1}{b-a}$.

On note : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a, b]}$.

2 Traduction :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a, b]} \text{ ssi : } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3 L'espérance mathématique d'une loi uniforme sur $[a, b]$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx \Rightarrow E(X) = \int_a^b x\, f(x) dx^* .$$

D'où : $E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx \Leftrightarrow E(X) = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \Leftrightarrow E(X) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{b+a}{2}}} \text{ ou } \boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}}.$$

$*$: **Car d'après Chasles :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} x\, f(x) dx + \int_a^b x\, f(x) dx + \int_b^{+\infty} x\, f(x) dx$

$$= \int_b^a x\, f(x) dx,$$

du fait que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} x\, f(x) dx = 0$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} x\, f(x) dx = 0$.

4 La variance :

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}}.$$

5 Calcul de la probabilité $P(\heartsuit < X \leq \square)$:

$$\begin{aligned} P(\heartsuit < X \leq \square) &= \int_{\heartsuit}^{\square} f(x)dx \\ &= \int_{\heartsuit}^{\square} \frac{1}{b-a}dx \\ &= \left[\frac{x}{b-a}\right]_{\heartsuit}^{\square} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{P(\heartsuit < X \leq \square) = \frac{\square - \heartsuit}{b-a}}}.$$

G Loi exponentielle sur $[0, +\infty[$

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda(\lambda > 0)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ lorsque sa densité de probabilité f est :

$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, et on note : $X \sim \varepsilon(\lambda)$.

2 Traduction :

$$X \rightsquigarrow \varepsilon(\lambda) \text{ ssi : } f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3 L'espérance mathématique d'une $\varepsilon(\lambda)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow E(x) = \int_0^{+\infty} x\, f(x) dx \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow E(x) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^{b} x\, f(x) dx \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E(X) = 1/\lambda}}.$$

4 La variance :

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = 1/\lambda^2}}.$$

5 Calcul de la probabilité $P(♥ \leq X < ❐)$:

$$\begin{aligned} P(♥ \leq X < ❐) &= \int_{♥}^{❐} f(x) dx \\ &= \int_{♥}^{❐} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= [-e^{-\lambda x}]_{♥}^{❐} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{P(♥ \leq X < ❐) = e^{-\lambda ♥} - e^{-\lambda ❐}}}.$$

6 Autres probabilités :

- $\boxed{\boldsymbol{P(X \leq c) = 1 - e^{-\lambda c}}}$
- $\boxed{\boldsymbol{P(X \leq c) = e^{-\lambda c}}}$.

H Loi normale centrée réduite

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite si sa densité de probabilité s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-x^2}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}}}.$$

2 Notations :

On écrit : $\boxed{X \rightsquigarrow N(0;1)}$.

3 L'espérance mathématique d'une $N(0,1)$:

$\boxed{E(X) = 0}$ ou $\boxed{\mu = m = 0}$.

4 La variance d'une $N(0,1)$:

$\boxed{V(X) = 1}$ ou $\boxed{\sigma^2 = 1}$.

5 Propriétés :

- $P(-1{,}96 \leq X \leq 1{,}96) = 0{,}95$.
- $P(X \leq 0) = P(X < 0) = P(X \geq 0) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$.
- $P(X < U) = P(X \leq U)$.
- $P(X > U) = P(X \geq U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P(X < U)$.
- $P(X < -U) = P(X \leq -U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P(X < U)$.
- $P(X > -U) = P(X \geq -U) = P(X < U) = P(X \leq U)$.
- $$\begin{aligned} P(-U \leq X \leq U) &= P(-U \leq X < U) \\ &= P(-U < X \leq U) \\ &= P(-U < X < U) \\ &= 2P(X < U) - 1 \\ &= 2P(X \leq U) - 1. \end{aligned}$$

I Loi normale $N(\mu\ ;\ \sigma^2)$

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres m (ou μ) et σ^2 si sa densité s'écrit :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$

2 Notations :

On écrit : $X \rightsquigarrow N(m;\sigma^2)$ ou $X \rightsquigarrow N(\mu;\sigma^2)$.

3 L'espérance mathématique d'une $N(\mu;\sigma^2)$:

$\boxed{E(X) = \mu = m}$.

4 La variance d'une $N(\mu\ ;\sigma^2)$:

$\boxed{V(X) = \sigma^2}$.

5 Autre notation :

$\boxed{X \rightsquigarrow N(E(X)\ ;\ V(X))}$.

6 Propriétés à connaître :

Si $X \rightsquigarrow N(\mu;\ \sigma^2)$, alors :

a. $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$.

On dit : " **on centre et on réduit la variable aléatoire X** ".

b. ▪ $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$.

▪ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.

7 Théorème de Moivre-Laplace :

ⓐ. **Son but** :

Ce théorème permet d'**approximer** une loi **binomiale** par une loi **normale**.

ⓑ. **Enoncé** :

- Soient X un variable aléatoire qui suit une loi $B(n, p)$, et Z la variable aléatoire :

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} .$$

(car quand $X \rightsquigarrow B(n, p)$: $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$).

- Pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t)dt$, φ étant la densité de probabilité d'une $N(0,1)$.

ⓒ. **Conditions d'application de ce théorème** : $n \geq 30$, $np \geq 5$, $np(1-p) \geq 5$.

Ainsi, on pourra approximer une loi binomiale par une loi normale uniquement lorsque ces trois conditions sont vérifiées.

En résumé :

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{. si } X \rightsquigarrow B(n,p) \\ \textbf{. si } n \geq 30 \\ \textbf{. si } np \geq 5 \\ \textbf{. si } np(1-p) \geq 5 \end{array}\right\} \textbf{ALORS, on peut approximer X par une loi normale : } N(np;\ np(1-p)).$$