1

ALAIN PILLER

PROBAS À DENSITÉ

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM. ES,L

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Rappels utiles

1 Epreuve de Bernoulli :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que **deux issues** :

- « **succés** » avec une probabilité $\boldsymbol{p}$.
- « **échec** » avec une probabilité $(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})$.

2 Schéma de Bernoulli :

Un schéma de Bernoulli est une succession d'épreuves de **Bernoulli**, **identiques** et **indépendantes** les unes des autres.

Notons que les tirages se font avec remise.

3 La loi binomiale :

La loi binomiale découle d'un schéma de Bernoulli. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir « κ » **succés** sur « $\boldsymbol{n}$ » **épreuves** indépendantes (ou avec remise) est :

$$\boxed{P(X=\kappa) = \binom{n}{\kappa} p^{\kappa}(1-p)^{n-\kappa}}.$$

Notons que : ▪ $\binom{n}{\kappa} = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!}$,

- les n épreuves sont **indépendantes**, elles comportent chacune **deux issues** (succés, échec) et sont **identiques**.

4 ⊕ sur la loi binomiale :

ⓐ. **Notation** :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres :

$$n = 30 \text{ et } p = 0,4 .$$

On note : $\boldsymbol{X \rightsquigarrow B(n\ ;\ p)}$, cad $\boldsymbol{X \rightsquigarrow B(30\ ;\ 0,4)}$.

ⓑ. **Espérance et variance** :

Soit $X \rightsquigarrow B(n\ ;\ p)$: $\boxed{\boldsymbol{E(X) = n \,.\, p}}$ et $\boxed{\boldsymbol{V(X) = n \,.\, p .(1-p)}}$.

B Variable aléatoire continue

1 Définition :

Une variable aléatoire continue X est une fonction qui, à chaque issue d'une expérience, associe un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$ tout entier.

2 Remarque 1 :

- En continue, $\leq$ et $<$ ou $\geq$ et $>$: c'est la même chose ! !

- Ainsi, l'événement la " variable aléatoire X est comprise entre ***a* et *b*** $(a, b \in \mathbb{R})$" s'écrit :

$$a \leq X \leq b$$
$$\text{ou } a < X < b$$
$$\text{ou } a \leq X < b$$
$$\text{ou } a < X \leq b.$$

- De plus :

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X < b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X \leq b). \end{aligned}$$

3 Remarque 2 :

- En continu : $P(X = \kappa) = 0$, **always** !

C Loi uniforme sur $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$

1 Définition :

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b] (a < b)$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a, b]$, de valeur : $\dfrac{1}{b-a}$.

On note : $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,\, b]}$.

2 Traduction :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,\, b]} \text{ ssi : } f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

3 L'espérance mathématique d'une loi uniforme sur $[a, b]$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx \Rightarrow E(X) = \int_a^b x\, f(x) dx^* .$$

D'où : $E(X) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx \Leftrightarrow E(X) = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b$

$$\Leftrightarrow E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \Leftrightarrow E(X) = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{b+a}{2}}} \text{ ou } \boxed{\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}}.$$

$*$: Car d'après Chasles : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx = \int_{-\infty}^{a} x\, f(x) dx + \int_a^b x\, f(x) dx + \int_b^{+\infty} x\, f(x) dx$

$$= \int_b^a x\, f(x) dx,$$

du fait que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} x\, f(x) dx = 0$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} x\, f(x) dx = 0$.

4 La variance :

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}}.$$

5 Calcul de la probabilité $P(\heartsuit < X \leq \square)$:

$$P(\heartsuit < X \leq \square) = \int_{\heartsuit}^{\square} f(x)dx$$

$$= \int_{\heartsuit}^{\square} \frac{1}{b-a}dx$$

$$= \left[\frac{x}{b-a}\right]_{\heartsuit}^{\square}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\heartsuit < X \leq \square) = \frac{\square - \heartsuit}{b-a}}.$$

D Loi normale centrée réduite

1 Notations :

On écrit : $\boxed{X \rightsquigarrow N(0;1)}$.

2 L'espérance mathématique d'une $N(0,1)$:

$\boxed{E(X) = 0}$ ou $\boxed{\mu = m = 0}$.

3 La variance d'une $N(0,1)$:

$\boxed{V(X) = 1}$ ou $\boxed{\sigma^2 = 1}$.

4 Propriétés :

- $P(-1{,}96 \leq X \leq 1{,}96) = 0{,}95$.
- $P(X \leq 0) = P(X < 0) = P(X \geq 0) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$.
- $P(X < U) = P(X \leq U)$.
- $P(X > U) = P(X \geq U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P(X < U)$.

- $P(X < -U) = P(X \leq -U) = 1 - P(X \leq U) = 1 - P(X < U)$.

- $P(X > -U) = P(X \geq -U) = P(X < U) = P(X \leq U)$.

- $$\begin{aligned} P(-U \leq X \leq U) &= P(-U \leq X < U) \\ &= P(-U < X \leq U) \\ &= P(-U < X < U) \\ &= 2P(X < U) - 1 \\ &= 2P(X \leq U) - 1. \end{aligned}$$

E Loi normale $N(\mu \,;\, \sigma^2)$

1 Notations :

On écrit : $X \rightsquigarrow N(m;\sigma^2)$ ou $X \rightsquigarrow N(\mu;\sigma^2)$.

2 L'espérance mathématique d'une $N(\mu;\sigma^2)$:

$\boxed{E(X) = \mu = m}$.

3 La variance d'une $N(\mu\,;\sigma^2)$:

$\boxed{V(X) = \sigma^2}$.

4 Autre notation :

$\boxed{X \rightsquigarrow N(E(X) \,;\, V(X))}$.

5 Propriétés à connaître :

Si $X \rightsquigarrow N(\mu;\, \sigma^2)$, alors :

a. $\dfrac{X - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$.

On dit : ″ **on centre et on réduit la variable aléatoire X**″ .

ⓑ. ▪ $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$.

▪ $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$.

▪ $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$.