3

ALAIN PILLER

NOMBRES COMPLEXES

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM. S

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

I A Définition de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un corps.

Nous avons : $\mathbb{C} = \{\boldsymbol{z = a + ib / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1}\}$.

Exemples : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -6i$.

B Vocabulaire :

1 $z = a + ib$ correspond à la **forme algébrique** de z.

2 $\boldsymbol{a} = Re(z)$ est la **partie réelle** de z.

3 $\boldsymbol{b} = Im(z)$ est la **partie imaginaire** de z.

4 $\boldsymbol{z}$ **est réel** $\boldsymbol{\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a}$.

5 $\boldsymbol{z}$ **est imaginaire pur** $\boldsymbol{\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z = ib, b \neq 0}$.

C Propriétés de la forme algébrique :

ⓐ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 = z_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

ⓑ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

ⓒ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions, $z_1 \times z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$ car $i^2 = -1$.

ⓓ. Soit $z = i$, un nombre complexe, nous avons :

$z_2 = i^2 = -1, z_3 = -i$ et $z_4 = 1$.

ⓔ. Soit $z = a + ib$, nous avons : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$.

II A Définition de la notion de nombre complexe conjugué :

Si $z = a + ib$, z étant un nombre complexe, on appelle **conjugué** de z le nombre complexe : $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.

Exemples : ▪ si $z_1 = 2 + 3i$, $\overline{z_1} = 2 - 3i$;

▪ si $z_2 = 2 + 4i$, $\overline{z_2} = 2 - 4i$;

▪ si $z_3 = 3$, $\overline{z_3} = 3$.

B Propriétés des nombres complexes conjugués :

ⓐ. Soit z un nombre complexe, $\bar{\bar{z}} = z$.

ⓑ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

Dans ces conditions : $\overline{z_1} = \overline{z_2}$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

ⓒ. Soit z un nombre complexe, $z + \bar{z} = 2a$ (avec $z = a + ib$).

ⓓ. Soit z un nombre complexe, $z - \bar{z} = 2ib$ (avec $z = a + ib$).

ⓔ. Soit z un nombre complexe, $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (avec $z = a + ib$).

ⓕ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

ⓖ. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

ⓗ. Soient z un nombre complexe imaginaire pur c'est-à-dire $z = ib$,
alors : $z + \bar{z} = 0$.

ⓘ. Soit $z \in \mathbb{R}$, cad $z = a$, alors : $z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$.

ⓙ. Soit z un nombre complexe : $\boldsymbol{z + \bar{z} = 2Re(z)}$ et $\boldsymbol{z - \bar{z} = 2i\ Im(z)}$.

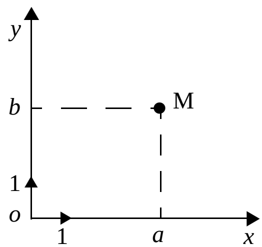
ⓚ. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Ⓛ. Soit z un nombre complexe : $\boldsymbol{\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n}$.

III A Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, si M est le point de coordonnées a et b respectivement sur $(1, 0)$ et $(0, 1)$ alors :

- le point $M(a, b)$ est l'image du nombre complexe $z = a + ib$;
- le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé l'affixe du point M ;
- graphiquement, nous avons :



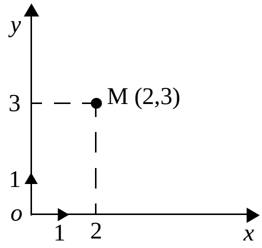
On note : $\boldsymbol{M(z)}$.

B Exemple :

Soit $z = 2 + 3i$, faisons une représentation géométrique de ce nombre complexe :

Pour cela, il suffit de placer le point M, c'est-à-dire l'image du nombre complexe $z = 2 + 3i$ sachant que M a pour coordonnées 2 et 3 sur (1,0) et (0,1) : $M(2, 3)$.

Représentation géométrique :



C Théorème :

Si z_A et z_B, sont les affixes des points A et B dans un repère orthonormé, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est : $\boldsymbol{z_B - z_A}$.

On note : $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}(\boldsymbol{z_B - z_A})$.

D Propriétés :

1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs ayant pour affixes respectifs z et z' : $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$.

Dans ces conditions :

ⓐ. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z = z'$.

ⓑ. $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$: $\vec{u} + \vec{v}(z + z')$.

2 Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

IV A Ecriture d'un nombre complexe sous forme trigonométrique :

Soient $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique, ρ son module et θ son argument.

Sous forme trigonométrique z s'écrit : $\boxed{\begin{array}{l} \quad z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \textbf{ou : } z = \rho e^{i\theta} \\ \textbf{ou : } z = [\rho, \theta] \end{array}}$.

B Module "ρ" ou "r" :

On appelle **module** de z, et on note $|z|$, le réel positif ou nul : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, avec $z = a + ib$.

On note : $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Exemples :
- Si $z_1 = 1 + i$, $|z_1| = \sqrt{2}$;
- Si $z_2 = 1 - i$, $|z_2| = \sqrt{2}$;
- Si $z_3 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$, $|z_3| = 2$.

C Argument "θ" :

1 Définition:

On appelle argument de z, et on note $\text{Arg}(z)$ ou θ, l'angle des demi-droites orientées $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, exprimé en radians et défini à $2k\pi$ près $(k \in \mathbb{Z})$.

On note : $\theta = \arg(z)[2\pi]$.

2 Propriétés :

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique :

$$z_1 = [\rho_1, \theta_1] \text{ et } z_2 = [\rho_2, \theta_2].$$

ⓐ. $z_1 = z_2$ si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$ et $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ⓑ. $z_1 \times z_2 = [\rho_1 \times \rho_2, \theta_1 + \theta_2]$.

ⓒ. $\dfrac{z_1}{z_2} = \left[\dfrac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$.

ⓓ. $\frac{1}{z_1} = \left[\frac{1}{\rho_1}, -\theta_1\right]$.

ⓔ. $z_1^n = [\rho_1^n, n\theta_1]$.

Il est bon de remarquer que cette dernière propriété porte le nom de la ***formule de Moivre*** que nous pouvons aussi écrire de la manière suivante :

$$\boxed{z_1^n = [\rho_1^n, n\theta_1] \Leftrightarrow z_1^n = \rho_1^n(\cos n\theta_1 + i\sin n\theta_1) \Leftrightarrow z_1^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}}.$$

OU

ⓐ. $z_1 = z_2$ ssi $r_1 = r_2$ et $\theta_1 = \theta_2[2\pi]$.

ⓑ. $z_1 \times z_2 = (r_1 \times r_2)e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$= (r_1 \times r_2)(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$.

ⓒ. $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

$= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$.

ⓓ. $\frac{1}{z_1} = \left(\frac{1}{r_1}\right)e^{-i\theta_1}$

$= \left(\frac{1}{r_1}\right)(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$.

ⓔ. $z_1{}^n = (r_1{}^n)e^{in\theta_1}$

$= (r_1{}^n)(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1))$.

ⓕ. $\forall\theta \in \mathbb{R} : \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ **et** $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

D Formules trigonométriques :

VOIR RABAT

E Astuces :

1 Si on connaît r et θ :

Dans ces conditions : $a = r\cos(\theta)$ et $b = r\sin(\theta)$.

2 Si on connaît a et b :

Dans ces conditions, θ est tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ou : $\cos(\theta) = \dfrac{a}{r}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{b}{r}$.

V Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations du second et troisième degrés :

Voir Training 4, page 39

VI Propriétés géométriques :

Soient quatre points $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$.

Nous savons déjà que : $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$.

A Démontrer le parallélisme :

- $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}}}$,
- $\boxed{\begin{aligned}(AB)//(CD) &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}\end{aligned}}$,

- $\boxed{\begin{aligned} A, B \text{ et } C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0[\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \end{aligned}}.$

B Démontrer l'orthogonalité :

- $\boxed{\begin{aligned} &(AB) \perp (CD) \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur} \end{aligned}},$

- $\boxed{\begin{aligned} &ABC \text{ triangle rectangle en A} \\ &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \text{ est un imaginaire pur} \end{aligned}}.$

C Démontrer l'égalité de longueurs :

$$\boxed{AB = CD \Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_D - z_C|}.$$

D Déterminer l'angle de 2 vecteurs :

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)}.$$

E Démontrer un triangle équilatéral direct :

ABC est un triangle équilatéral direct ssi : $\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\pi/3}}.$