

Mini Cours : Matrices et Graphes

1. Quelques définitions:

- a. Un graphe G est une représentation composée de sommets et d'arêtes.
- b. L'ordre d'un graphe est égal au nombre de ses sommets.
- c. 2 sommets sont dits adjacents s'ils sont reliés par une arête.
- d. Le degré d'un sommet est égal au nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
- e. Un graphe complet est un graphe dont les sommets sont 2 à 2 adjacents.

2. Chaîne eulérienne:

a. Notion de chaîne:

- Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- Une chaîne fermée est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
- Un cycle est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.
- Un graphe est dit connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

b. Chaîne eulérienne:

Une chaîne eulérienne est une chaîne telle que:

- elle contient toutes les arêtes du graphe,
- chaque arête n'est décrite qu'une seule fois.

3. Théorème d'Euler:

G étant un graphe connexe, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Deux sommets (et 2 seulement) X et Y de G sont de degré impair.
- G admet une chaîne eulérienne d'extrémités X et Y .

4. Autres définitions utiles:

- a. La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui composent la chaîne.
- b. La distance entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
- c. Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets.

5. Graphe orienté et Graphe probabiliste:

- a. Un graphe orienté est un graphe dont les arêtes sont orientées.
- b. Un graphe probabiliste est un graphe orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet donné vaut 1.

6. Matrice de transition:

- a. La matrice de transition M est la matrice associée à un graphe probabiliste.

- b. L'état stable P est l'unique solution de l'équation: $P = P \times M$.

Il s'agit de l'état de P_n à l'étape n qui est un état indépendant de l'état initial P_0 .

- c. Pour tout entier naturel n de \mathbb{N} :

- $P_n = P_0 \times M^n$
- $P_{n+1} = P_n \times M$.