Mini Cours : Géométrie dans l'Espace

1. Les vecteurs:

a. Soient $A\,(x_A\,;y_A;\,z_A)$, $B\,(x_B\,;y_B;\,z_B)$, $C\,(x_C\,;y_C\,;\,z_C)$, 3 points de l'espace:

- $\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A\,;y_B - y_A;\,z_B - z_A)$.

- Le milieu I du segment [AB] est: $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

- Le centre de gravité G du triangle ABC est:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,;\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,;\frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ssi:

il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\cdot\overrightarrow{BC}$.

b. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs non colinéaires:

Soit $\vec{w}$ un vecteur ; $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi:

il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\cdot\vec{u} + \beta\cdot\vec{v}$.

2. Produit scalaire:

a. Soient $\vec{u}\ (x\,;y;\,z)$ et $\vec{v}\ (x'\,;y'\,;\,z')$, deux vecteurs de l'espace:

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est: $\vec{u}\cdot\vec{v} = (x \times x') + (y \times y') + (z \times z')$.

- La norme du vecteur $\vec{u}$ est: $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b. Soient $A\,(x_A\,;y_A;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B;\,z_B)$, 2 points de l'espace:

La distance de A à B est: $AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

c. **Propriétés du produit scalaire**:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,
- $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$,
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$,
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$.

3. A savoir absolument:

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou perpendiculaires ssi: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Soit θ, l'angle entre 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

4. Droites de l'espace:

a. **Soient D une droite de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et D' une droite de vecteur directeur $\vec{u}\,' \neq \vec{0}$**:

- D et D' sont parallèles ssi: $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont colinéaires.
- D et D' sont orthogonales ssi: $\vec{u}$ et $\vec{u}\,'$ sont orthogonaux.

b. **Représentation paramétrique d'une droite de l'espace**:

- Soit A $(x_A ; y_A ; z_A)$ un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ $(a ; b ; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

5. Plans de l'espace:

a. Vecteur normal à un plan P:

Un vecteur $\vec{n}$ $(a\,;\,b\,;\,c)$ est normal à un plan P ssi:

ce vecteur est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires de ce plan.

b. Equation cartésienne d'un plan défini par un point A $(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}$ $(a\,;\,b\,;\,c)$:

L'équation cartésienne s'écrit:

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0.$$

c. A savoir absolument:

⟶ Soient P un plan dirigé par les vecteurs non colinéaires $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ et D une droite de vecteur directeur $\vec{w}$. Soit $\vec{n}$, un vecteur normal de P.

- P et D sont parallèles ssi: $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
- P et D sont perpendiculaires ssi: $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
- P et D sont parallèles ssi: $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
- P et D sont perpendiculaires ssi: $\vec{n}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

⟶ Soient P et P' deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

- P et P' sont parallèles ssi: $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.
- P et P' sont perpendiculaires ssi: $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.