

1

ALAIN
PILLER

PRIMITIVES, INTÉGRALES

Rien de plus facile !

BAC MATHS



SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

EXOS ANNALES BAC

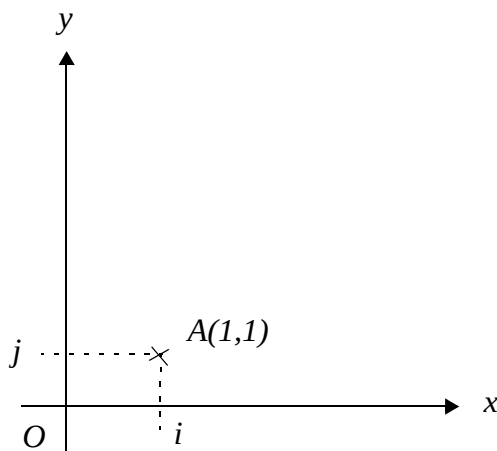


PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{O_i}, \vec{O_j})$, l'**unité d'aire (u.a.)**, est l'aire du rectangle $(O_i A_j)$ avec $A(1, 1)$.



B Primitive de f

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f** sur I toute fonction F dérivable sur I telle que : $F' = f$.

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , qui admet une primitive G sur I . Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est : $F(x) = G(x) + c, c \in \mathbb{R}$.
- Pour x_0 et y_0 fixés, il existe une unique primitive F de f avec : $F(x_0) = y_0$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C Intégrale d'une fonction continue

- Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et ζ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; \vec{O_i}, \vec{O_j})$.

L'intégrale de " a " à " b " de f est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe ζ :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, soit F une primitive de f :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

D Valeur moyenne

Pour toute fonction f continue sur $I = [a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est

le réel m tel que : $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$

E Propriétés de l'intégrale

- ①. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction paire ($f(-x) = f(x)$)

alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$

- ②. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$)

alors : $\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$

- ③. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

- ④. Nous avons : $\int_a^a f(x)dx = 0$

- ⑤. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in [a, b].$$

C'est ce qu'on appelle la **relation de CHASLES**.

- ⑥. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- ⑦. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ⑧. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx, \forall \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

- ⑨. Soient f et g intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$;

$$\text{on suppose : } \forall x \in [a, b] \text{ si } f(x) \leq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- ⑩. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

F Tableau des différentes primitives

Tableau 1 :

f	F	I
K	$K \cdot x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \neq 0$ et $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\cdot \mathbb{R}$ si $n > 0$ $\cdot]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$]0, +\infty[$

Tableau 2 :

f	F	Conditions
$K \cdot u'$	$K \cdot u$	-
$u' + v'$	$u + v$	-
$u' \cdot u^n$ ($n \neq 0$ et $n \neq -1$)	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	▪ Si $n < -1$ ▪ u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u strictement positive sur I
$\frac{u'}{u^2}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)	$\frac{-1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	-
$\sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} \cos(ax + b)$	-
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b)$	-

Avec :

- u et v dérivables sur I
- $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$