6

ALAIN
PILLER

PRIMITIVES, INTÉGRALES

Rien de plus facile !

BAC MATHS

TERM.
ES,L

SAVOIR

TRAINING

INTÉRROS LYCÉES

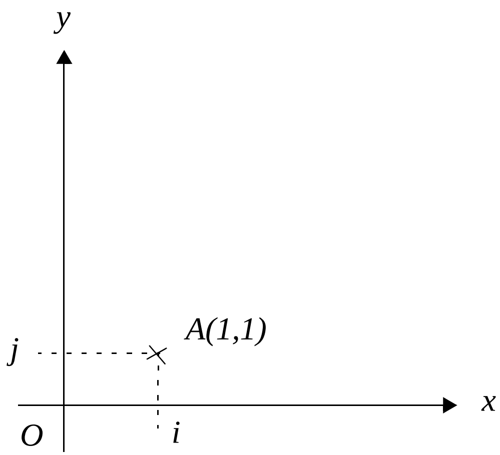
EXOS ANNALES BAC

PREMIUM ÉDITEUR

SAVOIR

A Unité d'aire

Dans un repère orthogonal $(O;\ \overrightarrow{Oi},\ \overrightarrow{Oj})$, **l'unité d'aire (u.a.)**, est l'aire du rectangle $(OiAj)$ avec $A(1, 1)$.



B Primitive de f

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle **primitive de f** sur I toute fonction F dérivable sur I telle que : $\boldsymbol{F' = f}$.

- Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, qui admet une primitive G sur I. Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est : $\boldsymbol{F(x) = G(x) + c,\ c} \in \mathbb{R}$.
- Pour x_o et y_o fixés, il existe une unique primitive F de f avec : $F(x_o) = y_o$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C Intégrale d'une fonction continue

• Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$ et ζ sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O; \overrightarrow{Oi}, \overrightarrow{Oj})$.

L'intégrale de "a" à "b" de f est l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe ζ :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx .$$

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, soit F une primitive de f :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

D Valeur moyenne

Pour toute fonction f continue sur $I = [a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel m tel que : $m = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

E Propriétés de l'intégrale

1. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction paire $(f(-x) = f(x))$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

2. Si f est intégrable sur $[-a, a]$ et si f est une fonction impaire $(f(-x) = -f(x))$ alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

③. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

④. Nous avons : $\int_a^a f(x)dx = 0$

⑤. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, c \in [a, b].$$
C'est ce qu'on appelle la **relation de CHASLES**.

⑥. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

⑦. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :
$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

⑧. Si f et g sont intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx, \forall\lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{R}.$$

⑨. Soient f et g intégrables sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$;

on suppose : $\forall x \in [a, b]$ si $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

⑩. Si f est intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, alors :
$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

F Tableau des différentes primitives

Tableau 1 :

f	F	I
K	$K \cdot x$	$\mathbb{R}$
x^{n} $(n \neq 0$ et $n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	· $\mathbb{R}$ si $n > 0$ · $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^{2}}$ $(x \neq 0)$	$\dfrac{-1}{x}$	$\mathbb{R}^{*}$
e^{x}	e^{x}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$

Tableau 2 :

f	F	*Conditions*
$K \cdot u'$	$K \cdot u$	-
$u' + v'$	$u + v$	-
$u' \cdot u^{n}$ $(n \neq 0 \text{ et } n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	▪ Si $n < -1$ ▪ u ne s'annule pas sur I
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u^{2}}$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\dfrac{-1}{u}$	$u \neq 0$ sur I
$u'e^{u}$	e^{u}	-
$\sin(ax + b)$	$\dfrac{-1}{a} \cos(ax + b)$	-
$\cos(ax + b)$	$\dfrac{1}{a} \sin(ax + b)$	-

Avec :

- u et v dérivables sur I
- $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$