CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Classes de terminale S • 2018

Source • Guillaume PETITJEAN

Problème I

Partie A : Les polynômes de Bernstein

1. a. $B_{2,0}(p) = (1-p)^2$, $B_{2,1}(p) = 2p(1-p)$ et $B_{2,2}(p) = p^2$
   b. $B_{3,0}(p) = (1-p)^3$, $B_{3,1}(p) = 3p(1-p)^2$, $B_{3,2}(p) = 3p^2(1-p)$ et $B_{3,3}(p) = p^3$
2. a. $B_{n,0}(p) = (1-p)^n$ et $B_{n,n}(p) = p^n$
   b. $(1-p)B_{n-1,i}(p) + pB_{n-1,i-1}(p)$
   $= (1-p)\binom{n-1}{i} p(1-p)^{n-1-i} + p\binom{n-1}{i-1} p^{i-1}(1-p)^{n-i}$
   $= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] p^i(1-p)^{n-i}$
   $= \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} = B_{n,i}(p)$
3. a. $B_{0,0}$ ne s'annule pas, $B_{1,0}$ s'annule en 1, $B_{1,1}$ s'annule en 0
   Si $n \geqslant 2$, $B_{n,0}$ s'annule en 1, $B_{n,n}$ s'annule en 0 et $B_{n,i}$ s'annule en 0 et 1 $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$
   b. $p \in [0;1]$, donc $B_{n,i}(p) \geqslant 0$
4. Soit la propriété dépendant de l'entier naturel n, " $\sum\limits_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$"
   $B_{0,0}(p) = 1$, donc la propriété est vraie au rang 1
   Supposons que la propriété est vraie pour un entier naturel n, soit $\sum\limits_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = 1$
   $\sum\limits_{i=0}^{n+1} B_{n+1,i}(p) = (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p)\sum\limits_{i=1}^{n} B_{n,i}(p) + p\sum\limits_{i=1}^{n} B_{n,i-1}(p)$
   $= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + (1-p)(1-(1-p)^n) + p(1-p^n)$
   $= (1-p)^{n+1} + p^{n+1} + 1 - p - (1-p)^{n+1} + p - p^{n+1} = 1$
   et la propriété est vraie au rang $n+1$
5. $1 = \sum\limits_{i=0}^{n} B_{n,i}(p) = p^n + (1-p)^n + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$
   En dérivant cette relation sur $]0;1[$,
   $0 = np^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(ip^{i-1}(1-p)^{n-i} - p^i(n-i)(1-p)^{n-i-1}\right)$
   $0 = np^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p^{i-1}(1-p)^{n-i-1}(i(1-p) - (n-i)p)$
   $0 = np^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p^{i-1}(1-p)^{n-i-1}(i-np)$
   $0 = np^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} ip^{i-1}(1-p)^{n-i-1} - n\sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i-1}$
   $0 = np^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + \dfrac{1}{p(1-p)}\sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} ip^i(1-p)^{n-i} - \dfrac{n}{1-p}\sum\limits_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$
   En notant $S = \sum\limits_{i=0}^{n} iB_{n,i}(p)$
   $0 = np^{n-1} - n(1-p)^{n-1} + \dfrac{1}{p(1-p)}(S - np^n) - \dfrac{n}{1-p}(1 - p^n - (1-p)^n)$
   On multiplie par $p(1-p)$ et on simplifie ce qui donne $S = np$ pour $p \in]0;1[$
   On vérifie que cette relation reste valable pour $p = 0$ et $p = 1$

On applique la même méthode en dérivant $S = np$ sur $]0;1[$

$np = np^n + \sum_{i=1}^{n-1} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$

$n = n^2 p^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \binom{n}{i} p^{i-1}(1-p)^{n-i} - \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)p^i(1-p)^{n-i-1} =$

$n^2p^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \binom{n}{i} p^{i-1}(1-p)^{n-i} + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i-1} - n\sum_{i=1}^{n-1} i \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i-1}$

donc $n = n^2p^{n-1} + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) \sum_{i=1}^{n-1} i \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} - \frac{n}{1-p}\sum_{i=1}^{n-1} i \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}$

En notant $T = \sum_{i=0}^{n} i^2 B_{n,i}(p)$

$n = n^2p^{n-1} + \frac{1}{p(1-p)}(T - n^2p^n) - \frac{n}{1-p}(S - np^n)$

En multipliant par $p(1-p)$ et en remplaçant S par np

$np(1-p) = n^2p^n(1-p) + (T - n^2p^n) - np(np - np^n)$

D'où on déduit $T = n^2p^2 + np(1-p)$ et on vérifie la validité pour $p = 0$ et $p = 1$

Partie B : Des courbes de Bézier

1. a. On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}$.
   Cet ensemble se réduit au point A.

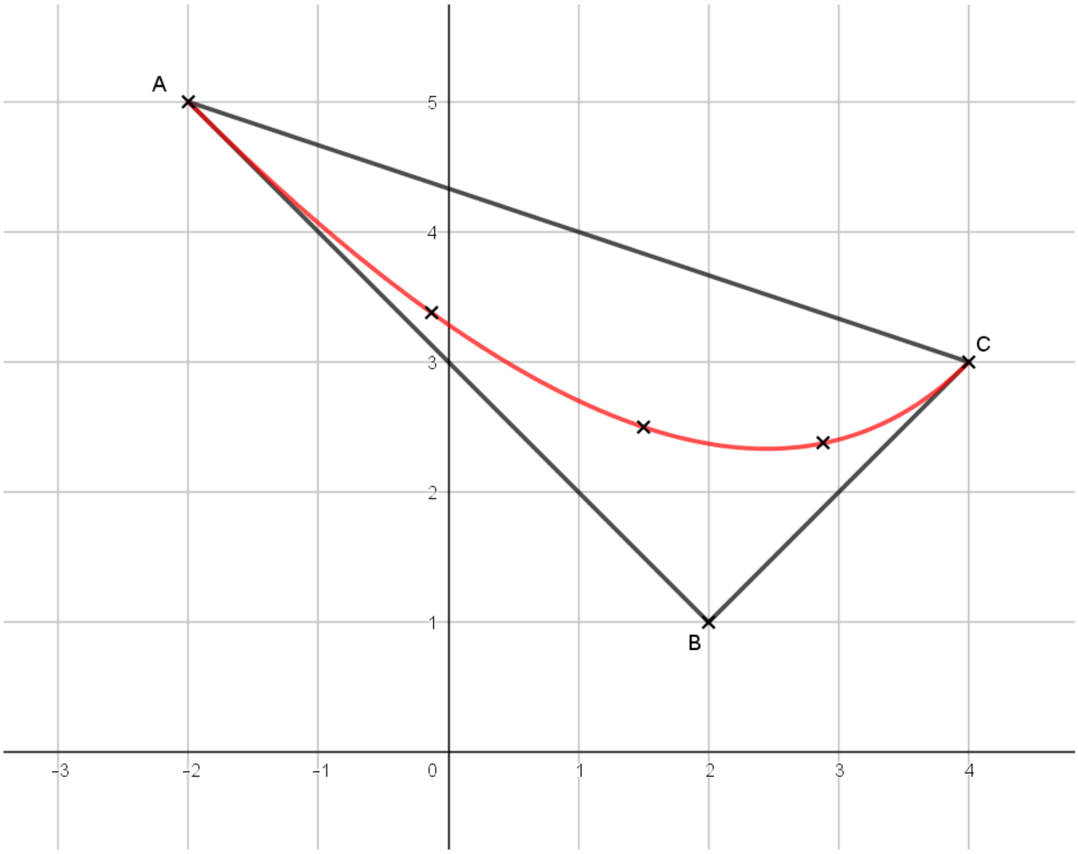
   b. On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OM} = (1-p)\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$
   Cette égalité peut s'écrire $\overrightarrow{BM} = p\overrightarrow{BC}$ avec $p \in [0;1]$
   L'ensemble cherché est donc le segment $[BC]$

2. a. M appartient à la courbe de Bézier cherchée si et seulement si
   il existe $p \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{OM} = (1-p)^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC}$
   $p = 1$ donne $M = C$ et $p = 0$ donne $M = A$
   Supposons que B appartienne à l'ensemble,
   alors il existe un réel p tel que $\overrightarrow{OB} = (1-p)^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC}$
   tel que $\overrightarrow{OB} = \left[(1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2\right]\overrightarrow{OB} + (1-p)^2\overrightarrow{BA} + p^2\overrightarrow{BC}$
   tel que $(1-p)^2\overrightarrow{BA} + p^2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$, absurde car A, B et C ne sont pas alignés.

   b. Avec $p = \frac{1}{4}$, $\overrightarrow{OM} = \frac{9}{16}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{16}\overrightarrow{OC}$
   d'où $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{16}\left(6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{16}\left(3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\right)$
   On construit A' et C' tels que $\overrightarrow{AA'} = 6\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$
   Alors M est l'intersection de (AA') et de (CC')

   Avec $p = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ où B' est le milieu de [AC].
   Alors M est le milieu de [BB'].

   Avec $p = \frac{3}{4}$, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{16}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{9}{16}\overrightarrow{OC}$
   On utilise une méthode analogue à $p = \frac{1}{4}$



3. $\overrightarrow{OM} = (1-p)^2\overrightarrow{OA} + 2p(1-p)\overrightarrow{OB} + p^2\overrightarrow{OC}$ donne $\overrightarrow{AM} = 2p(1-p)\overrightarrow{AB} + p^2\overrightarrow{AC}$
   Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$, M a pour coordonnées $(2p(1-p), p^2)$
   $0 \leqslant p \leqslant 1$, donc $0 \leqslant 2p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant p^2 \leqslant 1$,
   donc M est dans le domaine intersection du demi-plan de frontière (AB) et contenant C et du demi-plan de frontière (AC) et contenant B.
   (BC) a pour équation $y = 1 - x$ dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$
   $1 - 2p(1-p) = 2p^2 - 2p + 1 = p^2 + (p-1)^2 \geqslant p^2$, donc $y_M \leqslant 1 - x_M$,
   donc M est dans le demi-plan de frontière (BC) et contenant A.
   Au final, M est à l'intérieur du triangle ABC.

4. $M(x,y)$ avec $(x,y) = (-2(1-p)^2 + 4p(1-p) + 4p^2, 5(1-p)^2 + 2p(1-p) + 3p^2)$
   soit $(x,y) = (-2p^2 + 8p - 2, 6p^2 - 8p + 5)$
   $x + y = 4p^2 + 3$ et $3x + y = 16p - 1$
   $64x + 64y = 256p^2 + 192$ et $(3x + y + 1)^2 = 256p^2$
   donc $(3x + y + 1)^2 + 192 = 64x + 64y$
   Soit $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}$ deux vecteurs orthogonaux et de même norme.
   Soit M de coordonnées (x,y) dans $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ et (X,Y) dans $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$
   $\overrightarrow{OM} = X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v} = (3X - Y)\overrightarrow{\imath} + (X + 3Y)\overrightarrow{\jmath}$
   $\begin{cases} x = 3X - Y \\ y = X + 3Y \end{cases}$
   donc $(10X + 1)^2 + 192 = 64(3X - Y) + 64(X + 3Y)$
   donc $100X^2 + 20X + 193 = 256X + 128Y$
   donc $128Y = 100X^2 - 236X + 193$

   Le lieu de M est une partie de parabole.

Problème II

Partie A : Quelques exemples pour commencer

1. a, b et c étant les réels attribués à A, B et C, ils vérifient le système $\begin{cases} 2b = a + c \\ c = b \end{cases}$
ce qui donne $b = c = a$

2. a. Avec les mêmes notations $\begin{cases} 2b = a + c \\ 2c = b + d \\ 2d = c + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - c = a \\ -b + 2c - d = 0 \\ -c + 2d = e \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b - c = a \\ 3c - 2d = a \\ -c + 2d = e \end{cases}$, d'où $c = \dfrac{a+e}{2}$, $b = \dfrac{3a+e}{4}$ et $d = \dfrac{a+3e}{4}$

b. $\begin{cases} 2b - c = a \\ -b + 3c - d = e \\ -c + 3d = a + e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - c = a \\ 5c - 2d = a + 2e \\ -c + 3d = a + e \end{cases}$
donc $13d = 6a + 7e$ et $d = \dfrac{6a+7e}{13}$, puis $c = \dfrac{5a+8e}{13}$ et enfin $b = \dfrac{9a+4e}{13}$

c. $\begin{cases} 4b = a + c + d + e \\ 4c = a + b + d + e \\ 4d = a + b + c + e \end{cases}$ donc $5b = 5c = 5d = a + b + c + d + e$, donc $b = c = d$
On en déduit que $b = c = d = \dfrac{a+e}{2}$

3. Soit P_i les points avec $0 \leqslant i \leqslant n+1$ et p_i les nombres associés
Alors pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $(n+1)p_i + p_i = \sum\limits_{k=0}^{n+1} p_k$ ou $(n+2)p_i = \sum\limits_{i=0}^{n+1} p_k$
donc tous les p_i sont égaux pour $1 \leqslant i \leqslant n$
donc $(n+2)p_i = a + e + np_i$, donc $p_i = \dfrac{a+e}{2}$

Partie B : Etude du cas général

1. a. Démontrons la propriété suivante par récurrence :
"Pour tout point M de S, $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$"
Soit M un point jaune, $0 = k(M) = f_0(M) = f_1(M) \leqslant K$
Soit M un point bleu, $f_1(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f_0(P_i)}{d}$ est la moyenne de termes compris entre 0 et K, donc $0 = f_0(M) \leqslant f_1(M) \leqslant K$
En conclusion, la propriété est vraie au rang 0.
Supposons la propriété vraie pour un entier naturel donné. Alors pour tout point M de S, $0 \leqslant f_n(M) \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant K$
Si M est un point jaune, $0 \leqslant k(M) = f_{n+1}(M) = f_{n+2}(M) \leqslant K$
Si M est un point bleu, $f_{n+2}(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f_{n+1}(P_i)}{d} \geqslant \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f_n(P_i)}{d} = f_{n+1}(M) \geqslant 0$
Chaque $f_{n+1}(P_i) \leqslant K$, donc $f_{n+2}(M) \leqslant K$
donc pour tout point M, $0 \leqslant f_{n+1}(M) \leqslant f_{n+2}(M) \leqslant K$ et la propriété est vraie au rang $n+1$

b. Soit M un point de S. La suite $(f_n(M))$ est croissante et majorée par K, donc converge vers un réel $\ell(M)$. En particulier si M est un point jaune $\ell(M) = k(M)$
On définit la fonction f par $f(M) = \ell(M)$
Si M est jaune, $f(M) = k(M)$
Si M est bleu, le relation $f_{n+1}(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f_n(P_i)}{d}$ donne en faisant tendre n vers l'infini,
$f(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f(P_i)}{d}$
donc f est une solution pour l'attribution k

2. Soit $g = f + \alpha$ et $k' = k + \alpha$
Si M est jaune, $g(M) = f(M) + \alpha = k(M) + \alpha = k'(M)$
Si M est bleu, $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} g(P_i)}{d} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f(P_i) + \alpha}{d} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f(P_i)}{d} + \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} \alpha}{d} = f(M) + \alpha = g(M)$
donc g est une solution de l'attribution k'

3. Soit k une attribution et m le plus petit nombre $k(M)$. Alors $k' = k - m$ est une attribution telle que pour tout M de J, $k'(M) \geqslant 0$. D'après ce qui précède, il existe une solution g pour l'attribution k' et $f = g + m$ est une solution pour l'attribution $k' + m = k$

4. Soit K' le plus grand des nombres $f(M)$ pour $M \in S$, alors $K' \geqslant K$.
Supposons $K' > K$ et M un point tel que $f(M) = K'$. Alors M est un point bleu, sans voisins jaunes, sinon $f(M)$ serait strictement inférieur à K'
Soit une chaine $M - V_1 - \cdots - V_n - N$ avec V_1, V_n des points bleus et N un point jaune.
$f(N) = K$, donc $f(V_n) < K'$ et de proche en proche, $f(V_1) < K'$, puis $f(M) < K'$
contradictoire, donc $K' = K$ et pour tout M de S, $f(M) \leqslant K$

5. a. De $f(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f(P_i)}{d}$ et $g(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} g(P_i)}{d}$, on déduit $f(M) - g(M) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{d} f(P_i) - g(P_i)}{d}$

b. Si M est jaune, $f(M) = g(M) = k(M)$, donc $f(M) - g(M) = 0$, donc $f - g = 0$ sur J

c. $f - g$ est une solution de l'attribution nulle,
donc d'après la question 5.a., pour tout point M, $f(M) - g(M) \leqslant 0$.
De même $g - f$ est une solution de l'attribution nulle,
donc pour tout point M, $g(M) - f(M) \leqslant 0$
En conclusion, pour tout M de S, $f(M) - g(M) = 0$, donc $f(M) = g(M)$
donc $f = g$

d. Soit k le nombre attribué au point jaune. Une solution évidente f de cette attribution est donnée par $f(M) = k$ pour tout point M de S. D'après la question précédente, f est l'unique solution de l'attribution.

Problème III

Partie A : Tous les entiers naturels sont en or

1. De $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc pour tout entier n, $1\varphi^{n+2} + 0\varphi^{n+1} + 0\varphi^n = 0\varphi^{n+2} + 1\varphi^{n+1} + 1\varphi^n$ donc toute séquence 100 peut remplacer par la séquence 011
2. Montrons par récurrence que pour tout entier $k \geqslant 1$,
$011\cdots1$ avec $2k$ "1" équivaut à $10\cdots100$ et $011\cdots1$ avec $2k+1$ "1" équivaut à $10\cdots1001$

   011 équivaut à 100 et 0111 équivaut à 1001 donc la propriété est vraie au rang $k = 1$
Supposons la propriété vraie au rang k
$011\cdots1$ avec $2k+2$ "1" équivaut à $10\cdots10011$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc à $10\cdots10100$ et $011\cdots1$ avec $2k+3$ "1" équivaut à $10\cdots101001$ en ajoutant un "1"
Et la propriété est vraie au rang $n+1$
3. 1 peut être représenté par $1,00$ donc par $0,11$ donc 2 peut être représenté par $1,11$
2 peut être représenté par $01,11$ donc par $10,01$
et 3 peut être représenté par $11,01$ donc par $100,01$
donc 4 peut être représenté par $101,01$ donc par $101,0011$
donc 5 peut être représenté par $101,1111$
4. Montrons par récurrence la propriété :"l'entier naturel n admet une représentation en or"
La propriété est vraie pour $n = 1$
Supposons la vraie pour l'entier naturel $n \geqslant 1$

   - Si la représentation en or de n est de la forme $\boxed{\cdots 0,\cdots}$, alors $n+1$ admet une représentation en or de la forme $\boxed{\cdots 1,\cdots}$
   - Si la représentation en or de n est de la forme $\boxed{1\cdots 1,1\cdots}$, alors n admet une représentation de la forme $\boxed{10\cdots 10,0\cdots}$ ou $\boxed{10\cdots 100,1\cdots}$ d'après la question 2, donc $n+1$ admet une représentation de la forme $\boxed{10\cdots 11,0\cdots}$ ou $\boxed{10\cdots 101,1\cdots}$
   - Si la représentation en or de n est de la forme $\boxed{\cdots 1,00\cdots}$, alors n admet une représentation en or de la forme $\boxed{\cdots 0,11\cdots}$, donc $n+1$ admet une représentation en or de la forme $\boxed{\cdots 1,11\cdots}$
   - Si la représentation en or de n est de la forme $\boxed{\cdots 1,01\cdots 1}$, alors n admet une représentation de la forme $\boxed{1\cdots 1,1\cdots}$ d'après la question 2. et on est ramené au deuxième cas, et $n+1$ admet une représentation en or.
   - Si la représentation en or de n est de la forme $\boxed{\cdots 1,01}$, alors n admet une représentation de la forme $\boxed{\cdots 1,0011}$ et on est ramené au troisième cas, et $n+1$ admet une représentation en or.

   On a montré par disjonction de cas que la propriété est vraie pour l'entier $n+1$

Partie B : Représentation en or pur

1. Pour 2 : $10,01$; pour 3 : $100,01$; pour 4 : $101,01$ et pour 5 : $1000,1001$

2. a. $x \rhd 10a_{n-2}\cdots a_0, a_{-1}\cdots, a_{-q}$, donc $x = \varphi^n + \sum_{i=-q}^{n-2} a_i\varphi^i$

   On en déduit que $x \geqslant \varphi^n$
   Le nombre maximal d'une représentation en or de degré n est de la forme

   - Si $n = 2k$ est pair, $x_{max} \rhd 1010\cdots101, 01\cdots01$
     soit $x_{max} = \dfrac{1}{\varphi^{2p}} + \cdots + \dfrac{1}{\varphi^2} + 1 + \varphi^2 + \cdots \varphi^{2k} = \dfrac{\varphi^{2k+2} - \varphi^{-2p}}{\varphi^2 - 1}$
     donc $x_{max} - \varphi^{2k+1} = \dfrac{\varphi^{2k+2} - \varphi^{2k+3} + \varphi^{2k+1} - \varphi^{-2p}}{\varphi^2 - 1} = -\dfrac{\varphi^{-2p}}{\varphi^2 - 1} < 0$
     donc $x_{max} < \varphi^{n+1}$
   - Si $n = 2k+1$ est impair, $x_{max} \rhd 1010\cdots10, 10\cdots101$
     soit $x_{max} = \dfrac{1}{\varphi^{2p+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\varphi} + \varphi + \cdots + \varphi^{2k+1} = \dfrac{\varphi^{2k+3} - \varphi^{-2p-1}}{\varphi^2 - 1}$
     De même on montre que $x_{max} < \varphi^{n+1}$

   b. Si $x = 0$, alors 0 est la seule représentation de x et c'est une représentation en or.
   Si $x < 0$, x n'admet pas de représentation en or
   Supposons qu'il existe un réel $x > 0$ admettant deux représentations en or distinctes. On retire la partie identique des deux représentations en or à gauche du premier coefficient distinct en les deux représentations. Les deux représentations obtenues représentent un même nombre réel mais avec des teneurs en or distinctes, ce qui est impossible d'après l'encadrement précédent.

3. a. D'après l'encadrement $\varphi^n \leqslant x \leqslant \varphi^{n+1}$, on déduit $n\ln\varphi \leqslant \ln x \leqslant (n+1)\ln\varphi$
   donc $n \leqslant \dfrac{\ln x}{\ln\varphi} < n+1$ et $n = E\left(\dfrac{\ln x}{\ln\varphi}\right)$

   b. Algorithme pour déterminer la représentation en or d'un réel strictement positif, en affichant les entiers i pour lesquels $a_i = 1$

```
F ← (1 + racine(5))/2
Lire X
Tant que X > 0 Faire
    N ← PartieEntière((ln X)/(ln F))
    X ← X − F^N
    Afficher N
Fin Tant que
```

   c. $2018 \rhd 1010010000010100, 0101000000100001$

Variables	N	X
Initialisation		2018
Boucle 1	15	653,999
Boucle 2	13	132,997
Boucle 3	10	10,005
Boucle 4	4	3,151
Boucle 5	2	0,533
Boucle 6	-2	0,151
Boucle 7	-4	0,005
Boucle 8	-11	0,0005
Boucle 9	-16	0

4. Une représentation en or d'un réel x se compose de séquences de la forme $1\cdots1$ avec au moins deux "1", de la forme $0\cdots0$ avec au moins deux "0" et de séquences alternant "1" et "0"
   Chaque séquence de $1\cdots1$ est précédé d'au moins un "0" et peut être remplacée par $10\cdots100$ ou $10\cdots1001$
   Si on remplace toutes les séquences de plusieurs "1", il ne reste plus que des séquences 011 qu'on peut remplacer par 100

   Par exemple 1 01111 0111 01001 donne 1 10100 1001 01001
   puis 11 0100100101001 donne 100 0100100101001

5. Montrons que pour tout entier n, $\varphi^n = \dfrac{a_n + b_n\sqrt{5}}{2}$ avec a_n et b_n entiers
   On considère la propriété $P(n), n \in \mathbb{N}$: "$\varphi^n = \dfrac{a_n + b_n\sqrt{5}}{2}$ avec a_n et b_n entiers de même parité
   $P(0)$ est vraie car $\varphi^0 = 1 = \dfrac{2+0\sqrt{5}}{2}$ et $a_0 = 2$ et $b_0 = 0$
   $P(1)$ est vraie car $\varphi^1 = \varphi = \dfrac{1+1\sqrt{5}}{2}$ et $a_1 = 1$ et $b_1 = 1$
   Supposons la propriété vraie pour l'entier naturel n
   alors $\varphi^{n+1} = \varphi \times \varphi^n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{a_n + b_n\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a_n + 5b_n + (a_n + b_n)\sqrt{5}}{4}$
   a_n et b_n sont de même parité, donc $a_n + 5b_n$ est pair égal à $2a_{n+1}$ avec a_{n+1} entier et de même $a_n + b_n = 2b_{n+1}$ avec b_{n+1} entier.
   De plus, $a_{n+1} = b_{n+1} + 4b_n$, donc a_{n+1} et b_{n+1} sont de même parité.
   $\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, ce qui permet de montrer que la propriété $P(n)$ s'étend à n entier négatif avec ici également une démonstration par récurrence.

   On en déduit que tout réel ayant une représentation en or, donc s'écrivant comme somme de puissances de φ, doit s'écrire $\dfrac{\alpha + \beta\sqrt{5}}{2}$ avec α et β entiers
   Supposons qu'il existe des entiers α et β tels que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{\alpha + \beta\sqrt{5}}{2}$
   $\beta = 0$ donnerait $\alpha = \dfrac{2}{3}$ qui n'est pas entier et $\beta \neq 0$ impliquerait $\sqrt{5}$ rationnel ce qui est absurde dans les deux cas, donc $\dfrac{1}{3}$ n'admet pas de représentation en or.