

www.freemaths.fr

CORRIGÉ

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
Classes de terminale ES • 2019

Source • Gilbert JULIA

Concours Général Maths 2019, série ES : Correction

Auteur du document : Gilbert JULIA, professeur agrégé honoraire
Ancien préparateur au concours du CAPES de Mathématiques

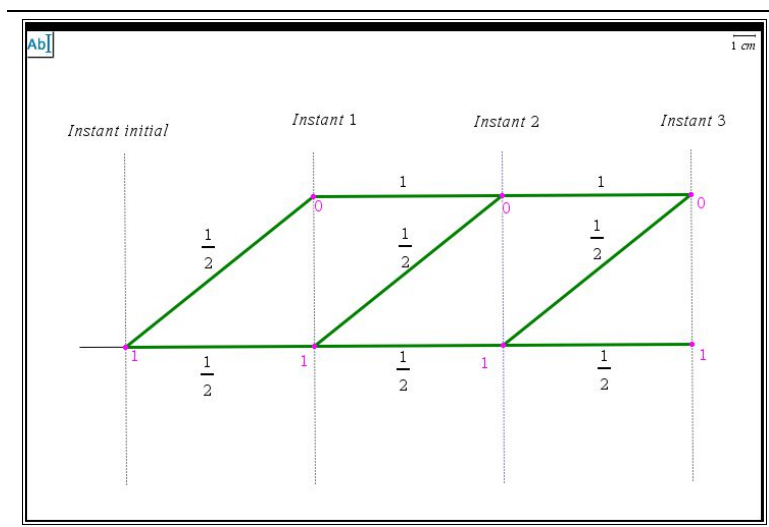
Problème 1 : Marche aléatoire

Question 1.

Dans cette question, on suppose $q = 1$.

Le déroulement de cette expérience peut être schématisé à l'aide d'un arbre de probabilité. Ci-contre une schématisation du déroulement des trois premières étapes.

1.a. À l'instant zéro, le marcheur est au point d'abscisse 1. L'évènement $[X_0 = 1]$ est par hypothèse l'évènement certain, sa probabilité est égale à 1.



À l'instant 1, et de façon équiprobable, soit le marcheur reste sur sa position, soit il se déplace à l'origine.

$$P([X_1 = 1]) = P([X_1 = 0]) = \frac{1}{2}.$$

1.b. À l'instant 2 et en se référant à l'arbre de probabilité : $P([X_2 = 1]) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et

$$P([X_2 = 0]) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

1.c. Lorsque le marcheur est au point d'abscisse 1, il peut de façon équiprobable ou y rester ou aller à l'origine.

Sachant qu'à un instant donné n le marcheur se trouve au point d'abscisse 1, la probabilité conditionnelle que le marcheur s'y trouve toujours à l'instant suivant est égale à $\frac{1}{2}$ de même que la probabilité conditionnelle que le marcheur aille à l'origine :

- D'une part : $P([X_{n+1} = 1]) = P([X_n = 1]) \times P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = P([X_n = 1]) \times \frac{1}{2}$.
- D'autre part : $P([X_{n+1} = 0]) = P([X_n = 0]) + P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 0]) = P([X_n = 0]) + P([X_n = 1]) \times \frac{1}{2}$

1.d. La suite $(P([X_n = 1]))_{n \in \mathbb{N}}$ apparaît comme une suite géométrique dont le premier terme $P([X_0 = 1])$ est égal à 1 et dont la raison est égale à $\frac{1}{2}$. De ce fait : $P([X_n = 1]) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

La raison de cette suite appartenant à l'intervalle $] -1 ; 1[$, la suite $(P([X_n = 1]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (P([X_n = 1])) = 0$$

Pour tout entier naturel n , les deux évènements $[X_n = 0]$ et $[X_n = 1]$ sont des évènements complémentaires.

$$P([X_n = 0]) = 1 - P([X_n = 1]) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

La suite $(P([X_n = 0]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P([X_n = 0])) = 1$

1.e. $E(X_n) = 0 \times P([X_n = 0]) + 1 \times P([X_n = 1]) = \frac{1}{2^n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (E(X_n)) = 0$

1.f On note la matrice ligne donnant la loi de probabilité de X_n comme indiqué dans l'énoncé : $U_n = (P[X_n = 0] \quad P[X_n = 1])$.

En considérant l'instant suivant : $U_{n+1} = (P[X_{n+1} = 0] \quad P[X_{n+1} = 1])$ et d'après les résultats obtenus dans **1.c** :

$$P([X_{n+1} = 0]) = P([X_n = 0]) + \frac{1}{2} P([X_n = 1]) \quad \text{et} \quad P([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2} P([X_n = 1]).$$

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice recherchée la cette question.

Le produit matriciel $U_n \times M = (P[X_n = 0] \quad P[X_n = 1]) \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est égal à la matrice ligne :

$$U_n \times M = (aP[X_n = 0] + bP[X_n = 1] \quad cP[X_n = 0] + dP[X_n = 1])$$

On cherche a, b, c, d de manière que les deux termes de la matrice ligne $U_n \times M$ soient identiques, respectivement, à $P([X_{n+1} = 0]) = P([X_n = 0]) + \frac{1}{2} P([X_n = 1])$ et à $P([X_{n+1} = 1]) = \frac{1}{2} P([X_n = 1])$.

C'est-à-dire de telle sorte que, identiquement, $aP([X_n = 0]) + bP([X_n = 1]) = P([X_n = 0]) + \frac{1}{2} P([X_n = 1])$ et $cP([X_n = 0]) + dP([X_n = 1]) = \frac{1}{2} P([X_n = 1])$.

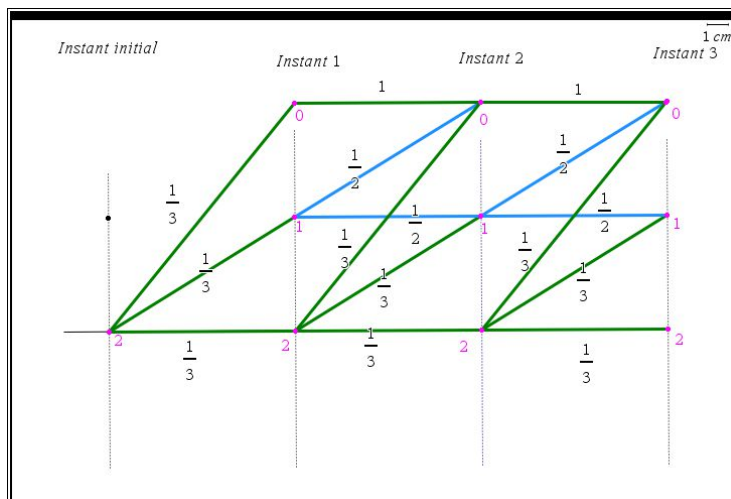
Il y a coïncidence pour toute valeur de l'entier n , si et seulement si $P([X_n = 0])$ et $P([X_n = 1])$ sont affectés de part et d'autre des deux égalités des mêmes coefficients. Par identification : $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$; $c = 0$; $d = \frac{1}{2}$

La matrice M est la matrice : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

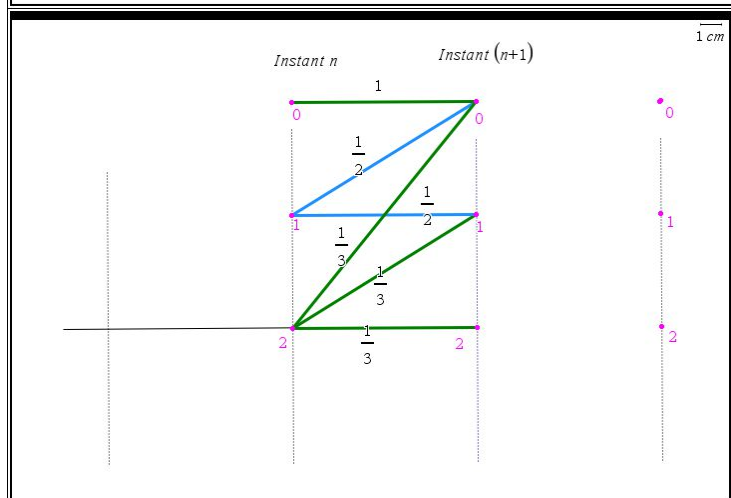
Question 2.

Dans cette question, on suppose $q = 2$.

Le déroulement de cette expérience peut encore être schématisé à l'aide d'un arbre de probabilité comme ci-contre.



Il en est de même du passage de l'instant n à l'instant suivant $(n + 1)$. Les probabilités affectées aux diverses branches sont des probabilités conditionnelles, $P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = k])$ pour $2 \geq i \geq k \geq 0$.



2.a. En se référant à cet arbre de probabilité, :

$$P([X_{n+1} = 2]) = P([X_n = 2]) \times P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 2]) = P([X_n = 2]) \times \frac{1}{3} \text{ pour la probabilité que } X_n = 2$$

$$P([X_{n+1} = 1]) = P([X_n = 2]) \times P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) + P([X_n = 1]) \times P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) \text{ soit :}$$

$$P([X_{n+1} = 1]) = P([X_n = 2]) \times \frac{1}{3} + P([X_n = 1]) \times \frac{1}{2} \text{ pour la probabilité que } X_n = 1$$

$$P([X_{n+1} = 0]) = P([X_n = 2]) \times P_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 0]) + P([X_n = 1]) \times P_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 0]) + P([X_n = 0]) \text{ soit :}$$

$$P([X_{n+1} = 0]) = P([X_n = 2]) \times \frac{1}{3} + P([X_n = 1]) \times \frac{1}{2} + P([X_n = 0]) \text{ pour la probabilité que } X_n = 0.$$

2.b. Notons désormais, par économie d'écriture : $p_n(k) = P([X_n = k])$.

$$\text{D'après 2.a nous avons les relations : } \begin{cases} p_{n+1}(0) = p_n(0) + \frac{1}{2} p_n(1) + \frac{1}{3} p_n(2) \\ p_{n+1}(1) = \frac{1}{2} p_n(1) + \frac{1}{3} p_n(2) \\ p_{n+1}(2) = \frac{1}{3} p_n(2) \end{cases}$$

Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ la matrice recherchée. Le produit $(p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2)) \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ est la

matrice ligne dont les éléments sont, respectivement, $\begin{cases} a_1 p_n(0) + a_2 p_n(1) + a_3 p_n(2) \\ b_1 p_n(0) + b_2 p_n(1) + b_3 p_n(2) \\ c_1 p_n(0) + c_2 p_n(1) + c_3 p_n(2) \end{cases}$

Par identification, ces résultats coïncident avec les expressions respectives de $(p_{n+1}(0) \ p_{n+1}(1) \ p_{n+1}(2))$ en

choisissant : $\begin{cases} a_1 = 1 ; a_2 = \frac{1}{2} ; a_3 = \frac{1}{3} \\ b_1 = 0 ; b_2 = \frac{1}{2} ; b_3 = \frac{1}{3} \\ c_1 = 0 ; c_2 = 0 ; c_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$, de sorte que la matrice M est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Il s'agit de la matrice qui intervient dans l'énoncé de la question suivante **1.c.**

$$\text{2.c. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ Autrement dit, } M \times A = \frac{1}{2} \cdot A$$

$$\text{2.d. } E(X_{n+1}) = 0 \cdot p_{n+1}(0) + 1 \cdot p_{n+1}(1) + 2 \cdot p_{n+1}(2)$$

Nous obtenons ce même résultat en effectuant le produit matriciel : $(p_{n+1}(0) \ p_{n+1}(1) \ p_{n+1}(2)) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de

sorte que : $E(X_{n+1}) = (p_{n+1}(0) \ p_{n+1}(1) \ p_{n+1}(2)) \times A$

2.e. Compte tenu des relations de récurrence écrites sous forme matricielle :
 $E(X_{n+1}) = (p_{n+1}(0) \ p_{n+1}(1) \ p_{n+1}(2)) \times A = ((p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2)) \times M) \times A.$

Par associativité du produit des matrices :

$$((p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2)) \times M) \times A = (p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2)) \times (M \times A) = (p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2)) \times \left(\frac{1}{2} A\right).$$

Nous aboutissons à la relation : $E(X_{n+1}) = \frac{1}{2} E(X_n)$

La suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et dont le premier terme est : $E(X_0) = 2.$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $E(X_n) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$

En tant que suite géométrique de raison appartenant à l'intervalle $] -1, 1[$, la suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente, de limite zéro.

2.f. La relation de récurrence $p_{n+1}(2) = \frac{1}{3} p_n(2)$ montre que la suite $(p_n(2))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Son premier terme est par hypothèse : $p_0(2) = 1.$

Ainsi, pour tout entier naturel n : $p_n(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$

2.g. En exploitant les deux questions précédentes :
$$\begin{cases} E(X_n) = p_n(1) + 2 p_n(2) = \frac{1}{2^{n-1}} \\ p_n(2) = \frac{1}{3^n} \end{cases}$$

Nous obtenons : $p_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - 2 p_n(2) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n}$

2.h. La somme des trois probabilités $p_n(0) + p_n(1) + p_n(2)$ de la distribution de probabilité de X_n étant égale à 1, nous obtenons : $p_n(0) + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n}\right) + \frac{1}{3^n} = 1$, soit : $p_n(0) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^n}$

2.i. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$. En conséquence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(2) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(0) = 1$. Il est certain que le marcheur finira inexorablement par se retrouver au point d'abscisse zéro (et y restera ...).

Retenons de cette question que, lorsque $q = 2$, la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_n est :

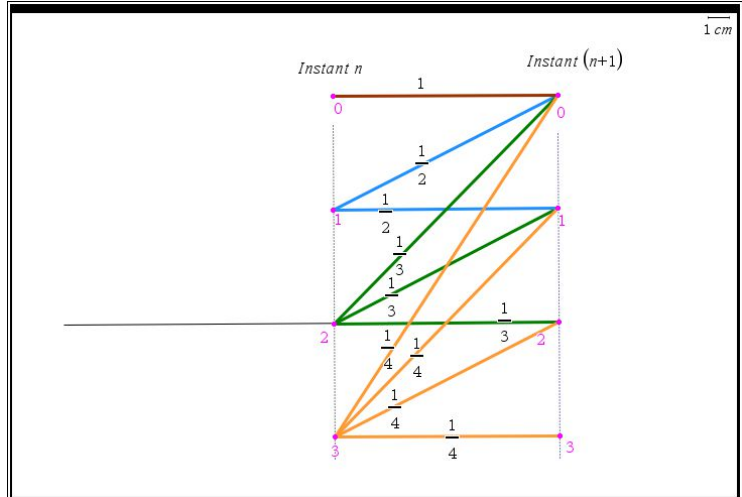
$$\left\{ p_n(0) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{3^n}; \quad p_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^n}; \quad p_n(2) = \frac{1}{3^n} \right\}$$

Question 3.

Dans cette question, on suppose $q = 3$.

Le passage de l'instat n à l'instat suivant $(n + 1)$ peut être schématisé à l'aide d'un arbre de probabilités partiel (noter le nombre de branches issues du point d'abscisse i : il est égal à $i + 1$).

Les probabilités affectées aux diverses branches sont des probabilités conditionnelles, $P_{[X_n=i]}([X_{n+1} = k])$ pour $3 \geq i \geq k \geq 0$.



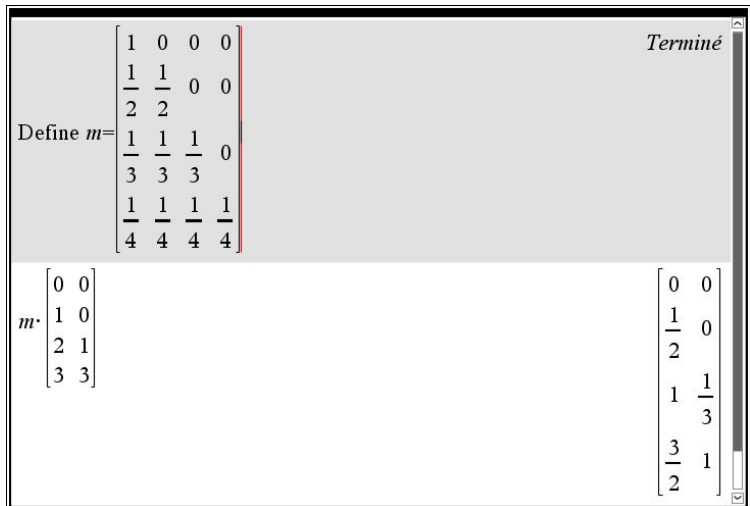
Notons toujours, par économie d'écriture : $p_n(k) = P([X_n = k])$.

Nous avons maintenant les relations :

$$\begin{cases} p_{n+1}(0) = p_n(0) + \frac{1}{2} p_n(1) + \frac{1}{3} p_n(2) + \frac{1}{4} p_n(3) \\ p_{n+1}(1) = \frac{1}{2} p_n(1) + \frac{1}{3} p_n(2) + \frac{1}{4} p_n(3) \\ p_{n+1}(2) = \frac{1}{3} p_n(2) + \frac{1}{4} p_n(3) \\ p_{n+1}(3) = \frac{1}{4} p_n(3) \end{cases} \quad \text{de sorte que}$$

$(p_{n+1}(0) \ p_{n+1}(1) \ p_{n+1}(2) \ p_{n+1}(3)) = (p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2) \ p_n(3)) \times M$ où M est la matrice livrée par l'énoncé pour cette question.

3.a. $M \times A = \frac{1}{2} \cdot A$ et $M \times B = \frac{1}{3} \cdot B$ comme en témoignent la copie d'écran ci-contre.



3.b. Notons P_n la matrice ligne : $P_n = (p_n(0) \ p_n(1) \ p_n(2) \ p_n(3))$.

L'espérance $E(X_{n+1})$ peut s'exprimer sous la forme d'un produit matriciel :

$E(X_{n+1}) = P_{n+1} \times A$ de sorte que : $E(X_{n+1}) = (P_n \times M) \times A = P_n \times (M \times A)$ puis que :

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{2} P_n \times A = \frac{1}{2} E(X_n)$$

Cette relation de récurrence montre que la suite $(E(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme est $E(X_0) = 3$.

L'expression du terme de rang n de cette suite est par conséquent : $\alpha_n = E(X_n) = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{2^n}$.

On remarque d'autre part que la variable aléatoire $\frac{X_n(X_n - 1)}{2}$ prend respectivement les valeurs 0, 0, 1, 3 lorsque X_n prend les valeurs 0, 1, 2, 3. Ainsi l'espérance de cette variable aléatoire peut s'exprimer à l'aide du produit matriciel du vecteur colonne B par le vecteur ligne P_n : $E\left(\frac{X_n(X_n - 1)}{2}\right) = P_n \times B$

Pour des raisons analogues à celles de la démarche précédente : $E\left(\frac{X_{n+1}(X_{n+1} - 1)}{2}\right) = P_{n+1} \times B$ puis $E\left(\frac{X_{n+1}(X_{n+1} - 1)}{2}\right) = (P_n \times M) \times B = P_n \times (M \times B)$ et enfin $E\left(\frac{X_{n+1}(X_{n+1} - 1)}{2}\right) = \frac{1}{3} E\left(\frac{X_n(X_n - 1)}{2}\right)$.

Cette relation de récurrence montre que la suite $\left(E\left(\frac{X_n(X_n - 1)}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Son premier terme est $E\left(\frac{X_0(X_0 - 1)}{2}\right) = 3$.

L'expression du terme de rang n de cette suite est par conséquent : $\beta_n = E\left(\frac{X_n(X_n - 1)}{2}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^{n-1}}$

3.c. Du point d'abscisse 3, le marcheur peut aller, et cela de manière équiprobable, en l'un ou l'autre des quatre points d'abscisses 0, 1, 2, ou 3.

De manière analogue aux situations précédentes $q=1$ et $q=2$, sachant que le marcheur est au point d'abscisse 3 à l'instant n , la probabilité conditionnelle $P_{X_n=3}[X_{n+1}=3]$ qu'il y soit encore à l'instant suivant $n+1$ est égale à $\frac{1}{4}$.

Ainsi pour tout entier naturel n : $P[X_{n+1}=3] = P_{X_n=3}[X_{n+1}=3] \times P[X_n=3] = \frac{1}{4} \times P[X_n=3]$. Avec nos notations allégées : $p_{n+1}(3) = \frac{1}{4} \times p_n(3)$.

La suite $(p_n(3))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et dont le premier terme est $p_0(3) = 1$.

L'expression du terme de rang n de cette suite est : $p_n(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$.

3.d. Nous disposons désormais de trois suites géométriques dont nous avons pu donner une formule explicite du terme de rang n : La suite $(p_n(3))_{n \in \mathbb{N}}$ mais aussi les deux suites d'espérances du **3.b.**

Or, $\alpha_n = E(X_n)$ et $\beta_n = E\left(\frac{X_n(X_n-1)}{2}\right)$ s'expriment à l'aide des probabilités $p_n(k)$; $k=1, 2, 3$ de la façon suivante : $\alpha_n = p_n(1) + 2p_n(2) + 3p_n(3)$ et $\beta_n = p_n(2) + 3p_n(3)$

Nous disposons en particulier des deux relations :
$$\begin{cases} p_n(3) = \frac{1}{4^n} \\ \beta_n = p_n(2) + 3p_n(3) = \frac{1}{3^{n-1}} \end{cases},$$
 lesquelles permettent

d'exprimer $p_n(2)$ explicitement en fonction de n : $p_n(2) = \frac{1}{3^{n-1}} - 3p_n(3) = \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{3}{4^n}$

3.e. La relation : $\alpha_n = p_n(1) + 2p_n(2) + 3p_n(3)$ permet à son tour d'exprimer $p_n(1)$ explicitement en fonction de n :

$$p_n(1) = \alpha_n - 2p_n(2) - 3p_n(3) = \frac{3}{2^n} - 2\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{3}{4^n}\right) - \frac{3}{4^n} = \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{3}{4^n}$$

3.f. La somme des trois probabilités que nous venons de calculer est :

$p_n(1) + p_n(2) + p_n(3) = \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{3}{4^n}\right) + \left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{3}{4^n}\right) + \frac{1}{4^n} = \frac{3}{2^n} - \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{4^n}$. C'est aussi la probabilité de l'évènement contraire de l'évènement $[X_n = 0]$. Ainsi :

$$p_n(0) = 1 - (p_n(1) + p_n(2) + p_n(3)) = 1 - \frac{3}{2^n} + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{4^n}$$

En conséquence : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(3) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(0) = 1$. Il est certain dans ce cas aussi que le marcheur finira inexorablement par se retrouver au point d'abscisse zéro (et y restera ...).

Retenons de cette question que, lorsque $q=3$, la distribution de probabilité de la variable aléatoire X_n est :

$$\left\{ p_n(0) = 1 - \frac{3}{2^n} + \frac{2}{3^{n-1}} - \frac{3}{4^n}; \quad p_n(1) = \frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{3}{4^n}; \quad p_n(2) = \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{3}{4^n}; \quad p_n(3) = \frac{1}{4^n} \right\}$$

Question 4. Cas général.

4.a. Du point d'abscisse q , le marcheur peut passer à chaque instant et de façon équiprobable à l'un ou l'autre des $(q+1)$ points d'abscisse positive et inférieure ou égale à q . La probabilité que le marcheur reste au point d'abscisse q est $\frac{1}{q+1}$.

La probabilité qu'il y soit encore après n pas est : $p_n(q) = \left(\frac{1}{q+1}\right)^n = \frac{1}{(q+1)^n}$

La suite $(p_n(q))_{q \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q+1}$ et de premier terme 1.

4.b. Cherchons une relation de récurrence liant $p_{n+1}(q-1)$ aux probabilités du rang n .

- La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=q-1]}([X_{n+1}=q-1])$, sachant que le marcheur est au point d'abscisse $q-1$ à l'instant n , qu'il y soit encore à l'instant suivant est égale à $\frac{1}{q}$ car, du point d'abscisse $q-1$, il peut passer de façon équiprobable en l'un ou l'autre des points dont l'abscisse est un entier de 0 à $q-1$.
- La probabilité conditionnelle $P_{[X_n=q]}([X_{n+1}=q-1])$, sachant que le marcheur est au point d'abscisse q à l'instant n , qu'il passe à l'instant suivant au point d'abscisse $q-1$ est égale à $\frac{1}{q+1}$ car, du point d'abscisse q , il peut passer de façon équiprobable en l'un ou l'autre des points dont l'abscisse est un entier de 0 à q .

L'évènement $[X_{n+1}=q-1]$ est la réunion des deux évènements disjoints : $[X_n=q-1] \cap [X_{n+1}=q-1]$ et $[X_n=q] \cap [X_{n+1}=q-1]$.

Nous pouvons de ce fait écrire la relation de récurrence :

$$p_{n+1}(q-1) = p_n(q-1) \times P_{[X_n=q-1]}([X_{n+1}=q-1]) + p_n(q) \times P_{[X_n=q]}([X_{n+1}=q-1])$$

Autrement dit :
$$p_{n+1}(q-1) = p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q+1}$$

En ce qui concerne les termes de la suite (u_n) :

$$u_{n+1} = p_{n+1}(q-1) + q p_{n+1}(q) = \left(p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q+1} \right) + q \times \left(\frac{1}{q+1} p_n(q) \right)$$

Soit :
$$u_{n+1} = p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) = \frac{1}{q} (p_n(q-1) + q p_n(q)) = \frac{1}{q} u_n.$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$. Son premier terme est : $u_0 = p_0(q-1) + q p_0(q) = q$.

Ainsi, pour tout entier naturel n :
$$u_n = q \times \left(\frac{1}{q}\right)^n = \frac{1}{q^{n-1}}$$

Connaissant des expressions explicites de u_n et de $p_n(q)$, nous en déduisons une expression explicite de la probabilité $p_n(q-1)$:

$$p_n(q-1) = u_n - q p_n(q) = \frac{1}{q^{n-1}} - \frac{q}{(q+1)^n}$$

4.c. Cherchons une relation de récurrence liant $p_{n+1}(q-2)$ aux probabilités analogues du rang n .

Les probabilités conditionnelles $P_{[X_n=q-2]}([X_{n+1}=q-2])$; $P_{[X_n=q-1]}([X_{n+1}=q-1])$; $P_{[X_n=q]}([X_{n+1}=q-2])$ sont égales, respectivement, à $\frac{1}{q-1}$; $\frac{1}{q}$; $\frac{1}{q-1}$.

L'évènement $[X_{n+1}=q-2]$ est la réunion des trois évènements disjoints : $[X_n=q-2] \cap [X_{n+1}=q-2]$, $[X_n=q-1] \cap [X_{n+1}=q-2]$ et $[X_n=q] \cap [X_{n+1}=q-2]$.

Nous en déduisons la relation de récurrence :

$$p_{n+1}(q-1) = p_n(q-2) \times P_{[X_n=q-2]}([X_{n+1}=q-2]) + p_n(q-1) \times P_{[X_n=q-1]}([X_{n+1}=q-2]) + p_n(q) \times P_{[X_n=q]}([X_{n+1}=q-2])$$

Autrement dit : $p_{n+1}(q-2) = p_n(q-2) \times \frac{1}{q-1} + p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q-1}$.

Tentons d'utiliser comme dans la question précédente une suite auxiliaire :

Considérons cette fois la suite auxiliaire $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = p_n(q-2) + (q-1) \times p_n(q-1) + \frac{q(q-1)}{2} \times p_n(q)$$

Montrons que cette suite est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = p_{n+1}(q-2) + (q-1) \times p_{n+1}(q-1) + \frac{q(q-1)}{2} \times p_{n+1}(q)$.

En appliquant les formules de récurrence déjà obtenues :

$$v_{n+1} = \left(\frac{p_n(q-2)}{q-1} + \frac{p_n(q-1)}{q} + \frac{p_n(q)}{q+1} \right) + (q-1) \left(\frac{p_n(q-1)}{q} + \frac{p_n(q)}{q+1} \right) + \frac{q(q-1)}{2} \times \frac{p_n(q)}{q+1}$$

Ce qui s'écrit : $v_{n+1} = \frac{p_n(q-2)}{q-1} + p_n(q-1) + \frac{q}{2} p_n(q) = \frac{1}{q-1} v_n$

La suite auxiliaire $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q-1}$. Son premier terme est

$$v_0 = p_0(q-2) + (q-1) \times p_0(q-1) + \frac{q(q-1)}{2} \times p_0(q) = \frac{q(q-1)}{2}$$

Nous obtenons la formule explicite : $v_n = \frac{q(q-1)}{2} \times \left(\frac{1}{q-1} \right)^n = \frac{q}{2(q-1)^{n-1}}$.

La relation $p_n(q-2) + (q-1)p_n(q-1) + \frac{q(q-1)}{2} p_n(q) = v_n = \frac{q}{2(q-1)^{n-1}}$ permet alors d'expliciter la probabilité $p_n(q-2)$:

$$p_n(q-2) = \frac{q}{2(q-1)^{n-1}} - (q-1) \left(\frac{1}{q^{n-1}} - \frac{q}{(q+1)^n} \right) - \frac{q(q-1)}{2(q+1)^n}$$

Autrement dit :
$$p_n(q-2) = \frac{q}{2(q-1)^{n-1}} - \frac{q-1}{q^{n-1}} + \frac{q(q-1)}{2(q+1)^n}$$

4.d. D'une manière plus générale, L'évènement $[X_{n+1} = q - k]$ est la réunion des évènements disjoints :

$$[X_{n+1} = q - k] = \bigcup_{i=0}^{i=k} ([X_n = q - i] \cap [X_{n+1} = q - k]).$$

Il nous est de ce fait possible d'exprimer $P([X_{n+1} = q - k])$ en fonction des probabilités conditionnelles

relatives à cette partition :
$$p_{n+1}(q-k) = \sum_{i=0}^{i=k} P_{X_n=q-i}[X_{n+1} = q - k] \times p_n(q-i)$$

C'est-à-dire :
$$p_{n+1}(q-k) = \sum_{i=0}^{i=k} \frac{1}{q-i+1} p_n(q-i).$$

Nous obtenons de cette façon une formule de récurrence.

Nous sommes conduits d'autre part à considérer par analogie avec ce que nous venons de faire comme suite auxiliaire (que nous espérons géométrique) une suite du style :

$$w_n = p_n(q-k) + (q-k+1) \times p_n(q-k+1) + \frac{(q-k+1)(q-k+2)}{2} \times p_n(q-k+1) \dots + \frac{q(q-1)(q-k+1)}{k!} \times p_n(q)$$

Voyons ce que cela donne avec $k = 3$.

La relation de récurrence est :

$$p_{n+1}(q-3) = p_n(q-3) \times \frac{1}{q-2} + p_n(q-2) \times \frac{1}{q-1} + p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q+1}$$

Il y a un terme en plus par rapport à la relation que nous avons pour $k = 2$.

La suite auxiliaire serait la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = p_n(q-3) + (q-2) \times p_n(q-2) + \frac{(q-1)(q-2)}{2} \times p_n(q-1) + \frac{q(q-1)(q-2)}{6} \times p_n(q)$$

Montrons que cette suite est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = p_{n+1}(q-3) + (q-2) \times p_{n+1}(q-2) + \frac{(q-1)(q-2)}{2} \times p_{n+1}(q-1) + \frac{q(q-1)(q-2)}{6} \times p_{n+1}(q)$$

En exploitant les diverses relations de récurrence déjà obtenues :

$$w_{n+1} = \left(p_n(q-3) \times \frac{1}{q-2} + p_n(q-2) \times \frac{1}{q-1} + p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q+1} \right) +$$

$$(q-2) \times \left(p_n(q-2) \times \frac{1}{q-1} + p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q+1} \right) +$$

$$\frac{(q-1)(q-2)}{2} \times \left(p_n(q-1) \times \frac{1}{q} + p_n(q) \times \frac{1}{q+1} \right) +$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)}{6} \times \left(\frac{1}{q+1} p_n(q) \right)$$

Nous obtenons :

$$w_{n+1} = p_n(q-3) \times \frac{1}{q-2} + p_n(q-2) \times \left(\frac{1}{q-1} + \frac{q-2}{q-1} \right) + p_n(q-1) \times \left(\frac{1}{q} + \frac{q-2}{q} + \frac{(q-1)(q-2)}{2q} \right)$$

$$+ p_n(q) \times \left(\frac{1}{q+1} + \frac{q-2}{q+1} + \frac{(q-1)(q-2)}{2(q+1)} + \frac{q(q-1)(q-2)}{6(q+1)} \right)$$

Autrement dit : $w_{n+1} = p_n(q-3) \times \frac{1}{q-2} + p_n(q-2) + p_n(q-1) \times \frac{q-1}{2} + \frac{q(q-1)}{6}$

Ce qui démontre que pour tout entier naturel n : $w_{n+1} = \frac{1}{q-2} \times w_n$. Bingo !

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q-2}$. Son premier terme est : $w_0 = \frac{q(q-1)(q-2)}{6}$.

Pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{q(q-1)(q-2)}{6} \left(\frac{1}{q-2} \right)^n = \frac{q(q-1)}{6(q-2)^{n-1}}$.

Cette formule explicite permet d'en proposer une pour $p_n(q-3)$:

$$p_n(q-3) = w_n - (q-2) \times p_n(q-2) - \frac{(q-1)(q-2)}{2} \times p_n(q-1) - \frac{q(q-1)(q-2)}{6} \times p_n(q)$$

c'est-à-dire que $p_n(q-3)$ est égal à l'expression suivante :

$$\frac{q(q-1)}{6(q-2)^{n-1}} - (q-2) \times \left(\frac{q}{2(q-1)^{n-1}} - \frac{q-1}{q^{n-1}} + \frac{q(q-1)}{2(q+1)^n} \right) - \frac{(q-1)(q-2)}{2} \times \left(\frac{1}{q^{n-1}} - \frac{q}{(q+1)^n} \right) - \frac{q(q-1)(q-2)}{6} \times \frac{1}{(q+1)^n}$$

ou encore : $p_n(q-3) = \frac{q(q-1)}{6(q-2)^{n-1}} - \frac{(q-2)q}{2(q-1)^{n-1}} + \frac{(q-1)(q-2)}{2q^{n-1}} - \frac{q(q-1)(q-2)}{6(q+1)^{n-1}}$

Exemple numérique

Le programme **marcheur** est affecté de deux arguments q et n .

Il affiche successivement la liste des probabilités : $\{p_i(q), p_i(q-1), p_i(q-2), p_i(q-3)\}$ pour i allant de 0 à n , calculées à l'aide des formules de récurrence que nous avons vues au fil de la résolution.

Il a été exécuté pour ci-contre avec $q = 10$; $n = 3$.

Pour cette valeur de q , le **marcheur** peut se trouver en l'un ou l'autre de 11 points différents, d'abscisse allant de 0 à 10. Sont affichées les probabilités que ce **marcheur** soit aux ponts d'abscisses 10, 9, 8 et 7.

Des calculs analogues ont été faits en utilisant maintenant les formules explicites des probabilités $p_n(q-k)$ que nous avons construites pour $k = 0, 1, 2, 3$.

On peut comparer les résultats affichés sur cet écran avec ceux, correspondants, de l'écran précédent.

Les listes sont identiques.

```

marcheur(10,3)
{1,0,0,0}
{
  1/11, 1/11, 1/11, 1/11
}
{
  1/121, 21/1210, 299/10890, 1691/43560
}
{
  1/1331, 331/133100, 59701/10781100, 1792261/172497600
}
Terminé
        
```

```

marcheur 10/12
Define marcheur(q,n)=
Prgm
Local p,pp
newList(4)→p
1→p[1]
Disp p
For i,1,n
p→pp
Define p[1]=pp[1]
q+1
Define p[2]=pp[2]+pp[1]
q
q+1
Define p[3]=pp[3]+pp[2]+pp[1]
q-1
q
q+1
Define p[4]=pp[4]+pp[3]+pp[2]+pp[1]
q-2
q-1
q
q+1
Disp p
EndFor
EndPrgm
        
```

```

Define a(q,n)=1/(q+1)^n
Terminé
Define b(q,n)=1/q^(n-1)*(q+1)^n
Terminé
Define c(q,n)=q/(2*(q-1)^(n-1)) - (q-1)/q^(n-1) + q*(q-1)/(2*(q+1)^n)
Terminé
Define d(q,n)=q*(q-1)/(6*(q-2)^(n-1)) - q*(q-2)/(2*(q-1)^(n-1)) + (q-1)*(q-2)/(2*q^(n-1)) - q*(q-1)*(q-2)/(6*(q+1)^n)
Terminé
{a(10,1),b(10,1),c(10,1),d(10,1)}
{
  1/11, 1/11, 1/11, 1/11
}
{a(10,2),b(10,2),c(10,2),d(10,2)}
{
  1/121, 21/1210, 299/10890, 1691/43560
}
{a(10,3),b(10,3),c(10,3),d(10,3)}
{
  1/1331, 331/133100, 59701/10781100, 1792261/172497600
}
        
```

```

Terminé
Terminé
Terminé
Terminé
Terminé
        
```

Problème 2 : Fonctions convexes

Prérequis

1. La définition de la propriété de convexité d'une fonction dérivable sur un intervalle I , telle qu'elle apparaît dans le programme de terminale ES : « Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite convexe sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes. »

2. Le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée : « Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée est une fonction croissante sur cet intervalle. »

3. En ce qui concerne les fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I , le lien entre convexité et signe de la dérivée seconde : « Une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I est convexe sur I si et seulement si sa fonction dérivée seconde est positive sur cet intervalle. »

Compte tenu des hypothèses envisagées dans ce problème, la caractérisation d'une fonction convexe à l'aide du signe de la dérivée seconde (prérequis n° 3) sera particulièrement intéressante.

1. Si la fonction u est une fonction deux fois dérivable sur \mathbf{R} , la fonction f définie par $f(x) = \exp(u(x))$ est elle aussi deux fois dérivable sur \mathbf{R} car elle est la composée de deux fonctions deux fois dérivables sur \mathbf{R} , la fonction u et la fonction exponentielle.

La dérivée première est définie par : $f'(x) = u'(x) \times \exp(u(x))$ et la dérivée seconde de f est définie par : $f''(x) = (u''(x) + (u'(x))^2) \times \exp(u(x))$

1.a. Si u est convexe sur \mathbf{R} , sa dérivée seconde est positive sur \mathbf{R} . La fonction $x \mapsto u''(x) + (u'(x))^2$ est alors une fonction positive sur \mathbf{R} , et il en est de même de la dérivée seconde de f . Donc, f est une fonction convexe.

1.b. L'ambiance de cette question conduit à conjecturer que la réciproque est probablement fautive.

Comme contre-exemple, recherchons une fonction u telle que $u''(x) + (u'(x))^2 \geq 0$ sur un intervalle contenu dans \mathbf{R} , mais pourtant telle que $u''(x) < 0$ sur cet intervalle.

Si nous considérons la fonction u deux fois dérivable sur \mathbf{R} définie par : $x \mapsto u(x) = -\frac{x^2}{2}$, sa fonction dérivée première est définie par : $x \mapsto u'(x) = -x$, et sa fonction dérivée seconde par $x \mapsto u''(x) = -1$ qui est une fonction négative sur \mathbf{R} . Cette fonction est de ce fait non convexe sur \mathbf{R} .

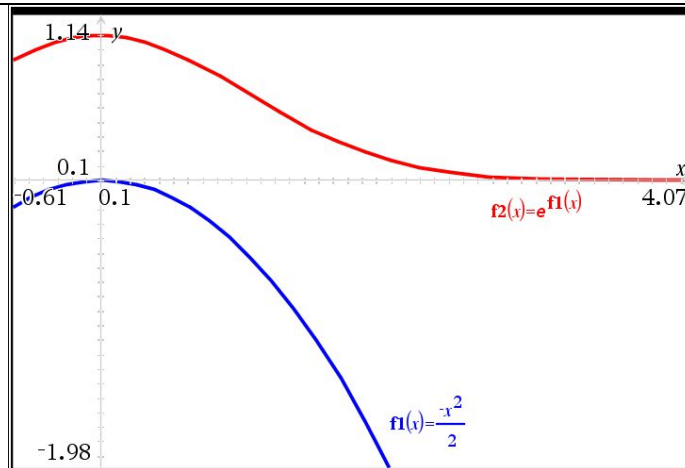
Posons : $f(x) = \exp(u(x)) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

Alors : $f''(x) = (-1 + x^2) \times \exp(u(x))$.

Cette dérivée seconde est positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$. De ce fait, la fonction f est une fonction convexe sur cet intervalle.

Nous avons ainsi l'exemple d'une fonction f qui est convexe sur $[1, +\infty[$ alors que la fonction u qui lui est associée n'est pas convexe.

La réciproque du **1.a** est fausse.



2. La fonction f_λ est définie sur \mathbf{R} par : $f_\lambda(x) = \exp(u(x) + \lambda x)$.

Sa dérivée première est définie par : $f_\lambda'(x) = (u'(x) + \lambda) \exp(u(x) + \lambda x)$.

Sa dérivée seconde est définie par : $f_\lambda''(x) = [u''(x) + (u'(x) + \lambda)^2] \exp(u(x) + \lambda x)$.

2.a. Si u est convexe, sa dérivée seconde est positive sur \mathbf{R} . Il en est de même, pour tout réel λ , de $u''(x) + (u'(x) + \lambda)^2$ et en conséquence de la dérivée seconde de f_λ . La fonction f_λ est une fonction convexe sur \mathbf{R} .

2.b. Réciproquement, supposons que pour toute valeur de λ la fonction f_λ soit convexe sur \mathbf{R} .

Soit x_0 un réel fixé. Si on attribue au réel λ la valeur : $\lambda = -u'(x_0)$, nous obtenons une fonction convexe, de dérivée seconde positive sur \mathbf{R} , et telle que $f_\lambda''(x_0) = [u''(x_0)] \exp(u(x_0) + \lambda x_0)$. On en déduit que : $u''(x_0) \geq 0$.

Le réel x_0 étant un réel fixé de façon arbitraire, le nombre $u''(x_0)$ est positif quelle que soit la valeur x_0 choisie dans \mathbf{R} . La fonction dérivée seconde de u est une fonction positive (au sens large) sur \mathbf{R} . La fonction u est une fonction convexe sur \mathbf{R} .

La réciproque est exacte.

Problème 3 : Polynômes de Lagrange

1.a et b confondus. On reconnaît dans les coefficients du polynôme du second degré R la « somme des racines » $a_1 + a_2$ comme coefficient de x et le « produit des racines » $a_1 a_2$ comme coefficient constant.

La fonction polynôme du second degré R est factorisable par $(x - a_1)$ et par $(x - a_2)$:

Pour tout réel x , $R(x) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2 = (x - a_1)(x - a_2)$.

L'équation $R(x) = 0$ a deux solutions, les deux réels distincts a_1 et a_2 , racines du polynôme R .

1.c. Le polynôme dérivé du polynôme R est le polynôme R' du premier degré défini par : $R'(x) = 2x - (a_1 + a_2)$.

En particulier : $R'(a_1) = 2a_1 - (a_1 + a_2) = a_1 - a_2$ et $R'(a_2) = 2a_2 - (a_1 + a_2) = a_2 - a_1$

1.d. La fonction affine K_1 est défini par : $K_1(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} b_1$.

En particulier : $K_1(a_1) = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_2} b_1 = b_1$ et $K_1(a_2) = \frac{a_2 - a_2}{a_1 - a_2} b_1 = 0$

Conclusion : Cette fonction affine K_1 prend la valeur b_1 en a_1 et s'annule en a_2 .

1.e. La fonction affine K_2 doit s'annuler en a_1 et prendre la valeur b_2 en a_2

Nous pouvons la définir en permutant les rôles des indices 1 et 2 : $K_2(x) = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} b_2$.

1.f. Par addition des deux fonctions affines précédentes, nous obtenons une nouvelle fonction affine ayant les propriétés requises :

$$F(x) = K_1(x) + K_2(x) = \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} b_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} b_2$$

2.a. Nous connaissons la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables : $(uv)' = u'v + v'u$.

Dans le cas d'un produit de trois fonctions, et en utilisant la propriété d'associativité de la multiplication :

$$(uvw)' = ((uv)w)' = (u'v + v'u)w + (uv)w'$$

Autrement dit : $(uvw)' = u'vw + v'wu + w'uv$.

2.b. La fonction S est le produit de trois fonctions affines, chacune d'entre elles ayant pour dérivée la fonction constante égale à 1.

En appliquant la formule de dérivation de la question **2.a**, pour tout réel x :

$$S'(x) = (x - a_2)(x - a_3) + (x - a_3)(x - a_1) + (x - a_1)(x - a_2).$$

2.c. En particulier : $S'(a_1) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$ et, par permutation circulaire¹ des indices 1, 2 et 3 : $S'(a_2) = (a_2 - a_3)(a_2 - a_1)$ puis $S'(a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

2.d. L_1 est la fonction polynomiale du second degré définie pour tout réel x par : $L_1(x) = \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$.

En particulier : $L_1(a_1) = \frac{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} = 1$ et d'autre part $L_1(a_2) = L_1(a_3) = 0$.

La fonction L_1 prend la valeur 1 en a_1 et s'annule en a_2 et en a_3 .

2.e. Si nous considérons la fonction polynomiale du second degré $x \mapsto b_1 L_1(x) = b_1 \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$, nous obtenons une fonction qui prend la valeur b_1 en a_1 et qui s'annule en a_2 et en a_3 .

Nous pouvons définir, par permutation circulaire des indices 1, 2 et 3, deux autres fonctions polynomiales du second degré remarquables :

- La fonction définie pour tout réel x par : $L_2(x) = \frac{(x - a_3)(x - a_1)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)}$ prend la valeur 1 en a_2 et s'annule en a_3 et en a_1 et la fonction $x \mapsto b_2 L_2(x)$ prend la valeur b_2 en a_2 et s'annule en a_3 et en a_1 .
- La fonction définie pour tout réel x par : $L_3(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$ prend la valeur 1 en a_3 et s'annule en a_1 et en a_2 et la fonction $x \mapsto b_3 L_3(x)$ prend la valeur b_3 en a_3 et s'annule en a_1 et en a_2 .

De ce fait, en posant : $G(x) = b_1 \frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + b_2 \frac{(x - a_3)(x - a_1)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} + b_3 \frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$, (c'est à dire en faisant la somme des trois fonctions $G = b_1 L_1 + b_2 L_2 + b_3 L_3$), nous obtenons une fonction polynomiale du second degré telle que pour $i = 1, 2, 3$: $G(a_i) = b_i$.

Cette fonction répond aux conditions requises dans cette question.

Supposons qu'il y ait une autre fonction polynomiale H du second degré au plus répondant aux mêmes conditions, c'est-à-dire telle que pour $i = 1, 2, 3$: $H(a_i) = b_i$.

La fonction $G - H$ est alors une fonction polynomiale du second degré au plus (en tant que différence de deux telles fonctions) qui s'annule pour trois valeurs réelles distinctes, les valeurs a_1, a_2, a_3 . D'après le théorème admis, il s'agit de la fonction nulle : nécessairement : $H = G$. La fonction polynomiale du second degré que nous avons construite est unique.

¹ Une « permutation circulaire » des indices 1, 2 et 3 consiste à remplacer dans une expression donnée dépendant des indices 1, 2 et 3 l'indice 1 par l'indice 2, l'indice 2 par l'indice 3 et l'indice 3 par l'indice 1.

Nous avons défini ci-contre la fonction polynomiale du second degré G et nous vérifions que cette fonction répond bien aux conditions requises.

Define $I1(x) = \frac{(x-a2) \cdot (x-a3)}{(a1-a2) \cdot (a1-a3)}$	Terminé
Define $I2(x) = \frac{(x-a3) \cdot (x-a1)}{(a2-a3) \cdot (a2-a1)}$	Terminé
Define $I3(x) = \frac{(x-a1) \cdot (x-a2)}{(a3-a1) \cdot (a3-a2)}$	Terminé
Define $g(x) = b1 \cdot I1(x) + b2 \cdot I2(x) + b3 \cdot I3(x)$	Terminé
⚠ $g(a1)$	$b1$
⚠ $g(a2)$	$b2$
⚠ $g(a3)$	$b3$

2.f. Le triplet (u, v, w) est une solution du système des trois équations en question si et seulement si la fonction polynomiale du second degré définie pour tout réel x par $H(x) = u + vx + wx^2$ est telle que pour $i = 1, 2, 3$: $H(a_i) = b_i$. D'après la question précédente, il existe une et une seule fonction polynomiale du second degré ayant ces propriétés, c'est la fonction polynomiale du second degré G . Le système d'équations a donc un et un seul triplet solution. C'est là une réponse recevable au début de la question posée.

Quant à « expliciter sa solution ... », plutôt que de « résoudre » le système d'équations, ce qui est une méthode envisageable, nous proposons deux autres méthodes ; au lecteur de choisir la sienne !

Méthode 1. On explicite les coefficients du trinôme du second degré G .

$$G(x) = b_1 \frac{x^2 - (a_2 + a_3)x + a_2 a_3}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + b_2 \frac{x^2 - (a_3 + a_1)x + a_3 a_1}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} + b_3 \frac{x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$$

- Coefficient constant : $u = \frac{b_1(a_2 a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{b_2(a_3 a_1)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} + \frac{b_3(a_1 a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.
- Coefficient de x : $v = -\frac{b_1(a_2 + a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} - \frac{b_2(a_3 + a_1)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} - \frac{b_3(a_1 + a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.
- Coefficient de x^2 : $w = \frac{b_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{b_2}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} + \frac{b_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$.

Ces trois réels forment, dans l'ordre où ils sont cités, le triplet solution attendu dans l'énoncé (attention dans l'énoncé au télescopage de notations, la même lettre x étant malencontreusement utilisée avec deux sens différents, l'utilisation de la lettre x dans **2.d** n'est pas la même que dans **2.f**).

Méthode 2. Méthode matricielle.

On remarque que le système des trois équations à résoudre s'écrit matriciellement : $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ où M

désigne la matrice à 3 lignes et 3 colonnes : $M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}$

Le déterminant de cette matrice est $(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)(a_1 - a_2)$ qui est non nul car les trois réels a_1, a_2, a_3 sont supposés distincts deux à deux. La matrice M est donc une matrice inversible.

Le système admet un et un seul triplet solution (nous le savons déjà), donné par la relation matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Le calcul effectif est délégué à la calculatrice. Les expressions en fonction des a_i et b_j de x, y, z que l'on obtient ainsi sont certes quelque peu exotiques ...

Terminé

Define $m = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$

$\det(m)$ $-(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)$

$m^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)) \cdot a_2 \cdot a_3}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} - \frac{a_3(b_2 - b_3)}{a_2 - a_3} + b_3}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} + \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} \\ \frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)) \cdot (a_2 + a_3)}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} + \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} \\ \frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2))}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} \end{bmatrix}$$

⚠ Le domaine du résultat peut être plus petit que le domaine de l'entrée.

Le logiciel de calcul formel reconnaît toutefois que les expressions obtenues par la **méthode 1** sont bien identiques aux expressions exotiques obtenues par la **méthode 2** : la réponse « true » garantit l'identité des deux expressions dont on teste l'égalité.

Terminé

Define $m = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \\ 1 & a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$

$\det(m)$ $-(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)$

$m^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)) \cdot a_2 \cdot a_3}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} - \frac{a_3(b_2 - b_3)}{a_2 - a_3} + b_3}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} + \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} \\ \frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)) \cdot (a_2 + a_3)}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} + \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} \\ \frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2))}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} \end{bmatrix}$$

$\frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)) \cdot a_2 \cdot a_3}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} - \frac{a_3(b_2 - b_3)}{a_2 - a_3} + b_3 = \frac{b_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{b_2 \cdot a_3 \cdot a_1}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} + \frac{b_3 \cdot a_1 \cdot a_2}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$ true

$\frac{(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2)) \cdot (a_2 + a_3)}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} + \frac{b_2 - b_3}{a_2 - a_3} = \frac{-b_1(a_2 + a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} - \frac{b_2(a_3 + a_1)}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} - \frac{b_3(a_1 + a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$ true

$\frac{-(a_1(b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_1 - b_2))}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} = \frac{b_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{b_2}{(a_2 - a_3)(a_2 - a_1)} + \frac{b_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}$ true

6/99

3.a Soit $y = P(x)$ l'équation cartésienne de la courbe représentative d'une fonction polynomiale P de degré $(n-1)$ au plus. La courbe représentative passe par tous les points M_1, \dots, M_n si et seulement si tout indice i de $\{1, 2, \dots, n\} : P(a_i) = b_i$

En s'inspirant de la méthode développée dans la question 2, nous pouvons considérer successivement :

- La fonction polynomiale L_1 de degré $(n-1)$ définie pour tout réel x par :

$$L_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}$$
 Par construction, cette fonction prend la valeur 1 en a_1 et s'annule pour toutes les autres valeurs a_2, a_3, \dots, a_n .
- La fonction polynomiale de degré $(n-1)$: $x \mapsto b_1 L_1(x) = b_1 \frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}$. Par construction, cette fonction prend la valeur b_1 en a_1 et s'annule pour toutes les autres valeurs a_2, a_3, \dots, a_n .
- Pour $i = 2, 3, \dots, n$, les fonctions polynomiales de degré $(n-1)$ L_i obtenues à partir de l'expression L_1 par permutation circulaire des indices (c'est-à-dire que l'on remplace l'indice 1 par i , l'indice 2 par $i+1$, ..., l'indice $n-i-1$ par n puis l'indice $n-i$ par 1, l'indice $n-i+1$ par 2, ..., l'indice n par $i-1$). Par construction, L_i prend la valeur 1 en a_i et s'annule pour tous les autres réels de l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}^2$
- Pour $i = 2, 3, \dots, n$, les fonctions $b_i L_i$.
- Enfin, la somme $G(x) = b_1 L_1 + b_2 L_2 + \dots + b_n L_n$

Par construction, G est une fonction polynomiale de degré $(n-1)$ au plus, telle que pour tout indice i de $\{1, 2, \dots, n\} : G(a_i) = b_i$. Elle répond aux conditions requises. Sa courbe représentative passe par tous les points M_1, \dots, M_n .

Si une autre fonction polynomiale H de degré $(n-1)$ au plus répond aux conditions requises, la fonction $G - H$ est une fonction polynomiale de degré $(n-1)$ au plus qui s'annule pour n valeurs distinctes. D'après le théorème admis, $G - H$ est la fonction nulle et $H = G$: La fonction que nous avons construite est l'unique fonction polynomiale de degré $(n-1)$ au plus qui répond aux conditions requises.

3.b. Considérons le système formé par les trois premières équations du système à résoudre (gardons en réserve la quatrième équation).

Nous pouvons l'écrire ainsi :
$$\begin{cases} x + y + z = -t \\ x + 2y + 4z = -8t \\ x + 3y + 9z = -27t \end{cases}$$
 . Il s'agit d'un système du même type que ceux que nous

avons vus à la question précédente **2.f**, avec : $a_1 = 1 ; a_2 = 2 ; a_3 = 3 ; b_1 = -t ; b_2 = -8t ; b_3 = -27t$.

Il reste à appliquer numériquement les formules que nous avons trouvées précédemment.

² Autrement dit, la permutation circulaire consistant à remplacer l'indice 1 par l'indice 2, l'indice 2 par l'indice 3, ..., l'indice $(n-1)$ par l'indice n et l'indice n par l'indice 1 donnera $b_2 L_2$, puis la même permutation circulaire appliquée à $b_2 L_2$ donnera $b_3 L_3$, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de $b_n L_n$.

La résolution de ce système avec ces valeurs numériques donne :

$$x = -6t ; y = 11t ; z = -6t .$$

La quatrième équation gardée en réserve permet de déterminer la valeur de t , en l'occurrence : $t = \frac{1}{6}$.

Le système a pour solution le quadruplet $\left(-1 ; \frac{11}{6} ; -1 ; \frac{1}{6}\right)$

```

Define a1=1 Terminé
Define a2=2 Terminé
Define a3=3 Terminé
Define b1=t Terminé
Define b2=-8*t Terminé
Define b3=-27*t Terminé
linSolve({x+a1*y+a1^2*z=b1, x+a2*y+a2^2*z=b2, {x,y,z}, x+a3*y+a3^2*z=b3}) {-6*t,11*t,-6*t}
solve(-6*t+4*11*t+16*-6*t+64*t=1,t) t=1/6
Define t=1/6 Terminé
{-6*t,11*t,-6*t} {-1,11/6,-1}
    
```

Le quadruplet que nous venons d'obtenir s'interprète au sens de la question 3.a.

Il représente en effet le quadruplet des coefficients d'une fonction polynomiale du troisième degré qui s'annule pour chacune des valeurs 1, 2 et 3 et qui prend la valeur 1 en 4, la fonction G définie par :

$$G(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{11}{6}x - 1 .$$

Sa courbe représentative (celle de la fonction nommée « **f1** » ci-contre) passe par quatre points remarquables comme l'indique la copie d'écran.

