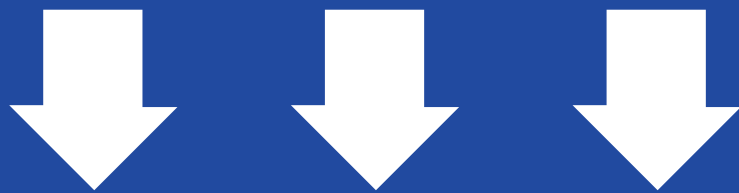


[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

**Limite d'une Suite**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

1. Démontrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = 1$ :

Ici:  $U_n = [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] &= [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] \\ &= (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 \\ &= n+1 - n \\ &= 1. \end{aligned}$$

Au total, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous avons bien:  $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = 1$ .

2. Déduisons-en que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 < U_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ :

- Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0 \iff U_n > 0$ .
- De plus, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = 1$

$$\iff \frac{U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]}{[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}}$$

$$\text{cad } U_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Au total, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ :  $0 < U_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ .

3. Calculons la limite de la suite  $(U_n)$  en  $+\infty$ :

$$\text{Pour tout } n \geq 1: 0 < U_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

Et par conséquent, la suite  $(U_n)$  est **convergente** et converge vers **0**.