

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

Limite d'une Suite



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Déterminons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n) :

Ici: $U_n = 1 + \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 + 2 \leq (-1)^n + 2 \leq 1 + 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 + (-1)^n \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \leq \frac{3}{n^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{1}{n^2 + 1} \right) \leq 1 + \left(\frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \right) \leq 1 + \left(\frac{3}{n^2 + 1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \leq U_n \leq \frac{n^2 + 4}{n^2 + 1}$$

$$\text{Or: } \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 4}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1.$$

2. Concluons:

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est **convergente** et converge vers **1**.