T^LE Technologique Mathématiques

Nombres Complexes
Forme Trigonométrique

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$j,\ 1 + j + j^2,\ j^n$

CORRECTION

1. Donnons la forme algébrique de j^2:

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} \quad \text{cad:} \quad j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi la forme algébrique de j^2 est: $j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2. Vérifions que $1 + j + j^2 = 0$:

$$1 + j + j^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 - 1 \quad \text{cad:} \quad 1 + j + j^2 = 0.$$

Ainsi, nous avons bien: $1 + j + j^2 = 0$.

3. Écrivons j sous forme trigonométrique:

Il s'agit de déterminer le module " r " et l'argument " θ " de j.

3. a. Le module:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \quad \text{cad:} \quad r = 1.$$

3. b. L'argument:

Nous avons: $j = 1 \times (\cos\theta + i \sin\theta)$.

Or: $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D'où:
$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Nous savons, d'après le cours que:

- $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$

- $\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases}.$

Dans ces conditions: $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{3}$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: $j = 1 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$.

4. Déduisons-en j^n:

*Pour cela, nous allons utiliser la formule de **Moivre**.*

$$j^n = \left[1 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) \right]^n$$

$$= 1^n \times \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]^n$$

$$= \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right),$$ *d'après Moivre.*

En conclusion: $j^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$.