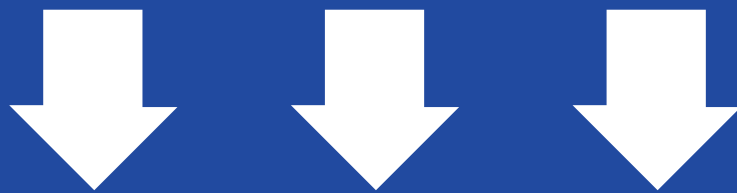


www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercice de Synthèse**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. L'ensemble S est le segment $[AB]$?

S correspond à l'ensemble des points $M(z)$ tels que:

$$\begin{cases} |z - 1| = |z - i| \\ |z - 3 - 2i| \leq 2 \end{cases} \quad (\text{I}).$$

Soit $z = x + iy$, nous avons:

$$\begin{aligned} (\text{I}) &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x & (\text{a}) \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 & (\text{b}) \end{cases} \end{aligned}$$

Au total, l'ensemble S correspond à l'intersection entre:

- d'une part la droite d'équation $y = x$ (a)
- d'autre part l'intérieur du cercle fermé d'équation $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4$ (b).

S correspond en fait au segment $[AB]$.

L'AFFIRMATION 1 EST: **VRAIE**.

2. $(\sqrt{3} + i)^{1515}$ est-il un réel ?

Soit: $z' = (\sqrt{3} + i)^{1515}$ et $z = \sqrt{3} + i$.

Sous forme exponentielle z s'écrit: $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

D'après Moivre, nous pouvons alors écrire:

$$z' = z^{1515}$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{1515}$$

$$\Leftrightarrow z' = 2^{1515} e^{i\frac{1515\pi}{6}}$$

$$\Leftrightarrow z' = 2^{1515} e^{i\frac{505\pi}{2}}.$$

Or: $\frac{505\pi}{2} = 126 \times (2\pi) + 0,5\pi.$

$$\begin{aligned} \text{Et: } e^{i\frac{505\pi}{2}} &= \cos\left(\frac{505}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{505}{2}\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= i. \end{aligned}$$

Au total, z' s'écrit: $z' = 2^{1515} \times i \sin(0,5\pi)$ cad $z' = 2^{1515} \times i \notin \mathbb{R}$.

L'AFFIRMATION 2 EST: **FAUSSE**.