

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Calcul d'intégrales



MINI COURS

A. Définition d'une primitive F de f sur I :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f** sur I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$F' = f.$$

B. Propriété :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C. Les primitives G de f sur I :

Soit F une primitive de la fonction f sur I .

Toutes les primitives G de f sur I sont de la forme : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

D. La primitive qui s'annule en " a " :

Toutes les primitives G de f sur I sont de la forme : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la primitive de f qui s'annule en " a " revient à trouver le nombre réel " c " tel que : $G(a) = 0$.

E. Tableaux des primitives :

Tu dois connaître par ♥ les primitives F des fonctions f suivantes.

Tableau 1 :

| f | F | I |
|----------------------|-----------------------|--|
| k | $k \cdot x$ | \mathbb{R} |
| x^n | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $n \neq 0$ et $n \neq -1$ • si $n > 0$: \mathbb{R} • $] -\infty, 0 [$ ou $] 0, +\infty [$ si $n < -1$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}$ | $] 0, +\infty [$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x}$ | \mathbb{R}^* |
| e^x | e^x | \mathbb{R} |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $] 0, +\infty [$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ | \mathbb{R} |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ | \mathbb{R} |
| $\ln(x)$ | $x \ln(x) - x$ | $] 0, +\infty [$ |

Tableau 2 :

| f | F | Conditions |
|-----------------------|-----------------------------|---|
| $k \cdot u'$ | $k \cdot u$ | |
| $u' + v'$ | $u + v$ | |
| $u' \cdot u^n$ | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $n \in \mathbb{N}$ • $n \neq 0$ • $n \neq -1$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}$ | u strictement positive sur I |
| $\frac{u'}{u}$ | $\ln(u)$ | u strictement positive sur I |
| $\frac{u'}{u^2}$ | $\frac{-1}{u}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $n \in \mathbb{N}$ • $n > 1$ • $u \neq 0$ sur I |
| $u' e^u$ | e^u | |
| $\sin(ax + b)$ | $\frac{-1}{a} \cos(ax + b)$ | $a \neq 0$ |
| $\cos(ax + b)$ | $\frac{1}{a} \sin(ax + b)$ | $a \neq 0$ |

F. Intégrale d'une fonction continue :

1. Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a ; b]$ et soit F une primitive de f :

$$\int_b^a f(x) dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a).$$

2. Valeur moyenne :

Pour toute fonction f continue sur $[a ; b]$, la valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est le réel μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_b^a f(x) dx.$$

3. Propriétés essentielles :

- $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$, quand f paire.
- $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, quand f impaire.
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

- $\int_a^b \lambda f(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx.$

- **CHASLES:** $\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx.$