Spé Maths
Terminale

Trigonométrie : Généralités

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COSINUS ET SINUS DE $\frac{\pi}{8}$ DE DEUX FAÇONS !

CORRECTION

1. Rappelons les relations entre cos $(2x)$ et ...:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: • $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

• $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

2. Déduisons-en $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$:

D'après la question précédente, nous pouvons déduire que pour tout réel x:

• $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos(x)}{2}$

• $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos(x)}{2}$.

3. Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ de deux façons différentes:

Première façon:

Nous avons: • $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

• $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0.$

Ainsi: • $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}},$

• $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}.$

Seconde façon:

Nous avons: • $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

• $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}.$

Or: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0.$

Ainsi: • $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$,

• $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$.