Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

MINI COURS

A. Sens de variation d'une suite :

1. Croissante, décroissante, constante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est croissante ssi : $U_{n+1} \geqslant U_n$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est décroissante ssi : $U_{n+1} \leqslant U_n$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est constante ssi : $U_{n+1} = U_n$.

2. Strictement croissante, strictement décroissante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est strictement croissante ssi : $U_{n+1} > U_n$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (U_n) est strictement décroissante ssi : $U_{n+1} < U_n$.

3. Suite monotone :

- Une suite monotone est une suite qui est soit croissante, soit décroissante.
- Une suite strictement monotone est une suite qui est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

4. Comment montrer le sens de variation d'une suite ?

- On examine le signe de $U_{n+1} - U_n$.
- Dans le cas d'une suite à termes strictement positifs, on peut examiner le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et le comparer à 1.
- Lorsque $U_n = f(n)$, f étant une fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ (ou un sous-ensemble de $[\,0\,;+\infty\,[$), les variations de la suite (U_n) suivent celles de f.

B. Suites majorées, minorées, bornées :

1. Suite majorée :

- La suite (U_n) est majorée par M ssi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq M$.
- La suite (U_n) est strictement majorée par M ssi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n < M$.
- M est le majorant de la suite (U_n).

2. Suite minorée :

- La suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq m$.
- La suite (U_n) est strictement minorée par m ssi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n > m$.
- m est le minorant de la suite (U_n).

3. Suite bornée :

(U_n) est bornée ssi elle est majorée et minorée.

C. Divergence :

- Si une suite est croissante et non majorée: elle diverge vers $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et non minorée: elle diverge vers $-\infty$.

D. Convergence :

1. Théorèmes :

- Si une suite est croissante et majorée alors: elle converge.

- Si une suite est décroissante et minorée alors: elle converge.

2. Propriétés :

- Si une suite (U_n) est majorée par M et converge vers un nombre réel ℓ, alors: $\ell \leqslant M$.

- Si une suite (U_n) est minorée par m et converge vers un nombre réel ℓ, alors: $\ell \geqslant m$.

E. Raisonnement par récurrence :

P(n) désigne une propriété concernant un entier naturel n et n_0 désigne un entier naturel.

Pour démontrer que P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, on suit les étapes suivantes:

Initialisation: on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité: on démontre, pour tout entier k supérieur ou égal à n_0, l'implication: P(k) vraie => P(k+1) vraie.

Conclusion: on conclut, d'après le principe de récurrence, que P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.