Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MINORANT PAR RÉCURRENCE 6

CORRECTION

Montrons par récurrence que la suite (U_n) admet $m = 1$ comme minorant:

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant 1$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1 \geqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = 2 \geqslant 1$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geqslant 1$ $(U_n - 1 \geqslant 0)$
et montrons qu'alors $U_{n+1} \geqslant 1$ $(U_{n+1} - 1 \geqslant 0)$.

Supposons: $U_n \geqslant 1$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$$U_{n+1} - 1 = 1 + \frac{1}{U_n} - 1$$

$$= \frac{1}{U_n}.$$

Or, par hypothèse: $U_n \geqslant 1$.

D'où: $\frac{1}{U_n} \geqslant 0$.

Dans ces conditions: $(1) \Rightarrow \frac{1}{U_n} \geqslant 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - 1 \geqslant 0$

$\Rightarrow U_{n+1} \geqslant 1$.

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 1$.

Ainsi: la suite (U_n) est bien minorée par $m = 1$.