Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MINORANT PAR RÉCURRENCE 3

CORRECTION

Montrons par récurrence que la suite (U_n) admet $m = 0$ comme minorant strict:

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n > 0$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1 > 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = 1 \times e^{-1} = \dfrac{1}{e} > 0$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$
et montrons qu'alors $U_{n+1} > 0$.

Supposons: $U_n > 0$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

$(1) \Rightarrow \dfrac{U_n}{e^{U_n}} > 0$ (car: $e^{U_n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow U_n \times e^{-U_n} > 0$

$\Rightarrow U_{n+1} > 0.$

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

Ainsi: la suite (U_n) est bien strictement minorée par $m = 0$.