Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MINORANT 4

CORRECTION

Montrons que la suite (U_n) admet $m = \frac{-1}{2}$ comme minorant:

D'après le cours, la suite (U_n) est minorée par m ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \geqslant m$.

Pour tout entier naturel n, nous avons: $\cos(n) \in [-1 ; 1]$.

$\cos(n) \in [-1 ; 1] \iff -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$

$\iff n^2 - 1 \leqslant n^2 + \cos(n) \leqslant n^2 + 1$

$\iff \frac{n^2 - 1}{n + 2} \leqslant \frac{n^2 + \cos(n)}{n + 2} \leqslant \frac{n^2 + 1}{n + 2}$

$\iff \frac{n^2 - 1}{n + 2} \leqslant U_n \leqslant \frac{n^2 + 1}{n + 2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geqslant \frac{n^2 - 1}{n + 2}$.

Or $n \in \mathbb{N}$, d'où: $n \geqslant 0 \iff n^2 \geqslant 0$

$$\iff n^2 - 1 \geqslant -1$$

$$\iff \frac{n^2 - 1}{n+2} \geqslant \frac{-1}{n+2}$$

$$\iff \frac{n^2 - 1}{n+2} \geqslant \frac{-1}{2}.$$

En conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geqslant \frac{n^2 - 1}{n+2} \geqslant \frac{-1}{2}.$

Par conséquent: la suite (U_n) admet bien $m = \frac{-1}{2}$ comme minorant.