# Spé Maths
## Terminale

# Raisonner par Récurrence

## CORRIGÉ DE L'EXERCICE

# MAJORANT 2

## CORRECTION

**1. a. Calculons $U_0$, $U_1$, $U_2$, $U_3$ et $U_4$:**

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \dfrac{n-1}{n^2+1}$.

Dans ces conditions:
- $U_0 = -1$
- $U_1 = 0$
- $U_2 = \dfrac{1}{5}$
- $U_3 = \dfrac{1}{5}$
- $U_4 = \dfrac{3}{17} < \dfrac{1}{5}$.

Ainsi: $U_0 = -1$, $U_1 = 0$, $U_2 = \dfrac{1}{5}$, $U_3 = \dfrac{1}{5}$, $U_4 = \dfrac{3}{17} < \dfrac{1}{5}$.

**1. b. Que dire a priori ?**

A priori :
- la suite $(U_n)$ semble croissante jusqu'à $n = 3$, puis décroissante au delà,
- la suite $(U_n)$ semble majorée par $M = \frac{1}{5}$.

2. Montrons que la suite $(U_n)$ admet $M = \frac{1}{5}$ comme majorant :

D'après le cours, la suite $(U_n)$ est **majorée** par $M$ ssi, pour tout entier naturel $n$ : $U_n \leqslant M$.

Pour tout entier naturel $n$, étudions la différence : $U_n - \frac{1}{5}$.

$$U_n - \frac{1}{5} = \frac{n-1}{n^2+1} - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{n-1}{n^2+1} - \frac{1}{5}\left(\frac{n^2+1}{n^2+1}\right)$$

$$= \frac{-n^2+5n-6}{5\,(n^2+1)}$$

$$= \frac{-(n^2-5n+6)}{5\,(n^2+1)}$$

$$= \frac{-(n-3)(n-2)}{5\,(n^2+1)} \qquad (\Delta = 25 - 24 = 1)$$

$$= \frac{-(n-3)(n-2)}{5\,(n^2+1)} \begin{cases} > 0, \text{ pour tout } n \in \, ]2\,;3[ \; \notin \mathbb{N} \\ \leqslant 0, \text{ pour tout } n \notin \, ]2\,;3[. \end{cases}$$

En conclusion : la suite $(U_n)$ admet bien $M = \frac{1}{5}$ comme majorant.