Spé Maths
Terminale

Limite d'une Suite

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GENDARMES 13

CORRECTION

1. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = 1$:

Ici: $U_n = [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi: $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]$

$$= (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2$$

$$= n + 1 - n$$

$$= 1.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien: $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = 1$.

2. Déduisons-en que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 < U_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$:

- Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0 \iff U_n > 0$.

- De plus, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}] = 1$

$$\iff \frac{U_n \times [\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]}{[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}]} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\iff U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

cad $U_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Au total, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $0 < U_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3. Calculons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

Pour tout $n \geqslant 1$: $0 < U_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

Or:
- $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = 0$.

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0.$$

Et par conséquent, la suite (U_n) est convergente et converge vers 1.