

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Limite d'une Suite



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a-t-on $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2$?

$$n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2 \Leftrightarrow n^2 \leq n^2 + 4 \leq n^2 + 4 + 4n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n^2 \leq n^2 + 4 - n^2 \leq n^2 + 4 + 4n - n^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 4 \leq 4 + 4n$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{4} \leq \frac{4}{4} \leq \frac{4(1+n)}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 \leq 1+n.$$

Comme $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons bien: $1+n \geq 1 \geq 0$ et donc $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2$.

2. Dédisons-en que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$:

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous savons que: $n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2$.

$$n^2 \leq n^2 + 4 \leq (n+2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{n^2} \leq \sqrt{n^2 + 4} \leq \sqrt{(n+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow n \leq \sqrt{n^2 + 4} \leq n + 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n} \leq \frac{\sqrt{n^2 + 4}}{n} \leq \frac{n + 2}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{n} \sqrt{n^2 + 4} \leq 1 + \frac{2}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Au total, pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons bien: $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$.

2. Concluons:

Ici, nous avons: $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$, pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Or: • $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1 \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \right)$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, nous pouvons affirmer que: la suite (u_n) est

convergente et converge vers 1 .