www.freemaths.fr

Spé Maths
Terminale

Limite d'une Suite

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GENDARMES 11

CORRECTION

1\. a. Calculons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n) quand $U_n = 5n^2 - 2(-1)^n$:

Ici: $U_n = 5n^2 - 2(-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n: $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

$\iff 2 \times (-1) \leqslant 2 \times (-1)^n \leqslant 2 \times (1)$

$\iff -2 \leqslant 2 \times (-1)^n \leqslant 2$

$\iff -2 \leqslant -2(-1)^n \leqslant 2$

$\iff 5n^2 - 2 \leqslant 5n^2 - 2(-1)^n \leqslant 5n^2 + 2$

$\iff 5n^2 - 2 \leqslant U_n \leqslant 5n^2 + 2.$

Or:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 - 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2\left(5 - \dfrac{2}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 = +\infty$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 + 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2\left(5 + \dfrac{2}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 = +\infty.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.$$

b. Calculons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n) quand $U_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1}$:

Ici: $U_n = n^2 - 2n + (-1)^{n+1}$ <=> $U_n = n^2 - 2n - (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n: $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

<=> $-1 \leqslant -(-1)^n \leqslant 1$

<=> $n^2 - 2n - 1 \leqslant n^2 - 2n - (-1)^n \leqslant n^2 - 2n + 1$

<=> $n^2 - 2n - 1 \leqslant U_n \leqslant n^2 - 2n + 1.$

Or:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 2n - 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \left(1 - \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 2n + 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \left(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.$$

2. Concluons dans les deux cas:

Comme dans les deux cas $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, nous pouvons affirmer que:

les suite (U_n) sont toutes les deux divergentes.