Spé Maths
Terminale

Limite d'une Suite

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

GENDARMES 10

CORRECTION

1. Déterminons la limite en $+\infty$ de la suite (U_n):

Ici: $U_n = 1 + \dfrac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n: $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

$$\iff -1 + 2 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 1 + 2$$

$$\iff 1 \leqslant 2 + (-1)^n \leqslant 3$$

$$\iff \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{2 + (-1)^n}{n^2+1} \leqslant \frac{3}{n^2+1}$$

$$\iff 1 + \left(\frac{1}{n^2+1}\right) \leqslant 1 + \left(\frac{2 + (-1)^n}{n^2+1}\right) \leqslant 1 + \left(\frac{3}{n^2+1}\right)$$

$$\iff \frac{n^2+2}{n^2+1} \leqslant U_n \leqslant \frac{n^2+4}{n^2+1}.$$

Or: • $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2+2}{n^2+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 4}{n^2 + 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2\left(1 + \dfrac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^2} = 1.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1.$$

2. Concluons:

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1$, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est convergente et converge vers 1.