Spé Maths
Terminale

Limite d’une Suite

CORRIGÉ DE L’EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE 3

CORRECTION

1. **Calculons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:**

Ici: $U_n = (n^3 + n^2 + 1)^{1/2} - n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} (n^3 + n^2 + 1)^{1/2} - n$$

$$= (+\infty) - (+\infty).$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours **à la technique de la quantité conjuguée** pour contourner cette **indétermination**.

$$U_n = (n^3 + n^2 + 1)^{1/2} - n \iff U_n = \frac{[(n^3 + n^2 + 1)^{1/2} - n] \times [(n^3 + n^2 + 1)^{1/2} + n]}{[(n^3 + n^2 + 1)^{1/2} + n]}$$

$$\iff U_n = \frac{n^3 + n^2 + 1 - n^2}{(n^3 + n^2 + 1)^{1/2} + n}$$

$$\iff U_n = \frac{n^3 + 1}{\sqrt{n^3\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)} + n}.$$

Dans ces conditions: $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^3 + 1}{\left(n^{3/2} \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3}}\right) + n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3 + 1}{n^{3/2} + n} \quad \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^3} = 0\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n^{3/2}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^{3/2}$$

$$= +\infty.$$

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty.$

2. Concluons:

Comme $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$, nous pouvons affirmer que: la suite (U_n) est divergente.