Spé Maths
Terminale

Limite d’une Suite

CORRIGÉ DE L’EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE 1

CORRECTION

1. Calculons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} n - \sqrt{n^2 - n}$$

$$= (+\infty) - (+\infty).$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours **à la technique de la quantité conjuguée** pour contourner cette **indétermination**.

$$U_n = n - \sqrt{n^2 - n} \iff U_n = \frac{(n - \sqrt{n^2 - n}) \times (n + \sqrt{n^2 - n})}{(n + \sqrt{n^2 - n})}$$

$$\iff U_n = \frac{n^2 - (n^2 - n)}{n + \sqrt{n^2 - n}}$$

$$\iff U_n = \frac{n}{n + \sqrt{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}}.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n + |n| \times \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + n \times \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \quad (|n| = n \text{ car } n > 0)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + n} \quad \left(\lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2}$.

2. Concluons:

Comme $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{2}$, qui est une limite finie, nous pouvons affirmer que:

la suite (U_n) est convergente et converge vers $\frac{1}{2}$.