Spé Maths
Terminale

Limite d'une Suite

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA NATURE D'UNE SUITE (U_n) 5

CORRECTION

Préalablement, notons que déterminer la nature d'une suite revient à dire si la suite est convergente ou divergente.

1. Déterminons la nature de la suite (U_n):

Ici: $U_n = 8 + \sqrt{3}\left(\frac{7}{8}\right)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 8 + \sqrt{3}\left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

Or:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 8 = 8$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{3}\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$ (car: $\frac{7}{8} < 1$).

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 8$ ($8 + 0$).

En conclusion, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 8$, limite finie: la suite (U_n) est convergente et converge vers 8.

2. Déterminons la nature de la suite (U_n):

Ici: $U_n = 1 + \dfrac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} \iff U_n = \dfrac{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}}.$$

Or: • $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \sqrt{2} - (\sqrt{2})^n = -\infty$ $\left(\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty \text{ car: } \sqrt{2} > 1 \right)$.

• $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \sqrt{2} = 1 - \sqrt{2} < 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ $\left(\dfrac{-\infty}{1 - \sqrt{2} < 0} \right)$.

En conclusion, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$: la suite (U_n) est divergente.