www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD
2026

$$h(x) = 4 - \frac{4}{x}$$

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

PRÉALABLE :

- $U_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{U_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 4$
- $U_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculons le nombre de poissons au 1er janvier 2026 :

Cela revient à calculer : U_1.

$$U_1 = 4 - \frac{4}{U_0} = 4 - \frac{4}{4} = 3\,000 \text{ poissons.}$$

Ainsi, le nombre de poissons au 1er janvier 2026 est égal à : 3000.

2. a. Justifions que " h " est croissante sur $]0;+\infty[$:

Pour cela, nous devons déterminer le signe de h' sur $]0;+\infty[$.

La fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et nous avons:

$$h'(x) = \frac{4}{x^2}.$$

Or sur $]0;+\infty[$: $x^2 > 0$.

Donc pour tout $x \in]0;+\infty[$: $h'(x) > 0$.

Ainsi la fonction h est: strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2. b. Montrons que $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$ ".

Initialisation: Nous savons que $U_0 = 4$ et $U_1 = 3$.

D'où: $2 \leqslant U_1 \leqslant U_0 \leqslant 4$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n,
$2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$ et montrons qu'alors $2 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

Supposons: $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Freemaths : Tous droits réservés

D'où: $(1) \Rightarrow h(2) \leqslant h(U_{n+1}) \leqslant h(U_n) \leqslant h(4)$

(h est strictement croissante)

$\Rightarrow 2 \leqslant h(U_{n+1}) \leqslant h(U_n) \leqslant 3 \leqslant 4$

$\Rightarrow 2 \leqslant U_{n+2} \leqslant U_{n+1} \leqslant 4.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4.$

2. c. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente: $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4.$

$$2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_n \leqslant 4 \Leftrightarrow \begin{cases} U_{n+1} \leqslant U_n \\ U_n \geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 2 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente.

2. d. Justifions que $\ell = 2$:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet pour limite ℓ telle que:

$$\ell = h(\ell).$$

$$\ell = h(\ell) \Leftrightarrow \ell = 4 - \frac{4}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 - 4\ell + 4 = 0.$$

Or: $\ell^2 - 4\ell + 4 = (\ell - 2)^2.$

Freemaths : Tous droits réservés

Donc la limite de la suite (U_n) est: $\ell = 2$.

2. e. Une élimination à long terme ?

Il n'y aura pas d'élimination des poissons à long terme: il y aura une stabilisation de la population à 2 000 perches-soleil.

3. a. Recopions et complétons le script:

Le script complété de sorte qu'il renvoie le plus petit entier n tel que l'inégalité $U_n < s$ soit vérifiée s'écrit:

```
def population(s) :
    u = 4
    n = 0
    while u >= s :
        u = 4 - 4/u
        n = n + 1
    return n
```

Freemaths : Tous droits réservés

3. b. Quelle valeur ?

La commande population(2 . 2) renvoie: 10.

Cela signifie que la population de perches-soleil sera inférieure à 2 200 à partir de 2025 + 10 = 2035.

PARTIE B

1. Donnons l'ensemble des solutions de (E):

Nous avons: • la fonction p est dérivable et définie sur $[0; +\infty[$

• $p(0) = 4$

• p est solution de $y'(t) + y(t) = 2$ (E).

En appliquant le cours, l'ensemble des solutions de l'équation (E) est:

$$f(t) = C e^{-t} + 2, C \in \mathbb{R}.$$

2. Déduisons-en " p " sur $[0; +\infty[$:

Nous savons que: $p(0) = 4$.

$p(0) = 4 \iff C e^{-0} + 2 = 4$ cad $C = 2$.

Ainsi sur $[0; +\infty[$: $p(t) = 2 e^{-t} + 2$.

3. A long terme ?

Pour répondre à cette question, calculons: $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)$.

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = 2 \times \left(\lim_{t \to +\infty} e^{-t} \right) + 2$$

$$= 2 \times 0 + 2$$

$$= 2 \neq 0.$$

Donc même ce modèle ne prévoit pas une élimination à long terme de l'espèce envahissante: il prévoit une stabilisation à 2 000 perches-soleil.

Freemaths : Tous droits réservés