www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

POLYNÉSIE
2026

$f(x) = \ln(8x^3 - 1)$

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

PRÉALABLE:

- $f(x) = \ln(8x^3 - 1)$ $\quad (\ln(U))$
- $\mathcal{D}f = [4; 10]$
- f est dérivable sur $\mathcal{D}f$.

1. Calculons f' sur $\mathcal{D}f$:

Pour tout $x \in [4; 10]$: $f'(x) = \dfrac{24x^2}{8x^3 - 1}$ $\quad \left(\dfrac{U'}{U}\right)$.

Or: $(2x - 1) \times (4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$

$= 8x^3 - 1$.

Pour conséquent sur $[4; 10]$, nous pouvons écrire:

$$f'(x) = \frac{24x^2}{(2x-1) \times (4x^2+2x+1)}.$$

2. a. Déduisons-en que f est croissante sur $[4 ; 10]$:

Sur l'intervalle $[4 ; 10]$: • $24x^2 > 0$

• $4x^2 + 2x + 1 > 0$.

Donc le signe de f' dépend uniquement du signe de " $2x - 1$ ".

Or sur $[4 ; 10]$: $2x - 1 > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $\mathcal{D}f$.

2. b. Montrons que sur $\mathcal{D}f$, $4 \leqslant f(x) \leqslant 10$:

Si $x \in [4 ; 10]$, nous pouvons écrire: $4 \leqslant x \leqslant 10$.

Comme f est strictement croissante sur $\mathcal{D}f$:

$4 \leqslant x \leqslant 10 \Rightarrow f(4) \leqslant f(x) \leqslant f(10)$

$\Rightarrow \ln(511) \leqslant f(x) \leqslant \ln(7999)$

$\Rightarrow 4 \leqslant 6,236 \leqslant f(x) \leqslant 8,99 \leqslant 10$

$\Rightarrow 4 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

Ainsi sur $\mathcal{D}f$, nous avons bien: $4 \leqslant f(x) \leqslant 10$.

Freemaths : Tous droits réservés

3. a. Montrons que sur $\mathcal{D}g$, $g(x) = 0$ admet une unique solution " α ":

Pour tout $x \in [\,4\,;\,10\,] = \mathcal{D}g$: $g(x) = f(x) - x$.

g est strictement décroissante sur $[\,4\,;\,10\,]$.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;\,b\,]$ ou $I =]\,a\,;\,b\,[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- g est continue sur $[\,4\,;\,10\,]$,
- " $k = 0$ " est compris entre: $g(10) \approx 8,99 - 10 < 0$

  et: $g(4) \approx 6,236 - 4 > 0$,
- g est strictement décroissante sur $[\,4\,;\,10\,]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\,4\,;\,10\,]$.

Au total, $g(x) = 0$ admet bien une unique solution α sur $[\,4\,;\,10\,]$.

3. b. Déterminons un encadrement à 10^{-3} près de α:

Un encadrement à 10^{-3} près pour α est: $8,499 \leqslant \alpha \leqslant 8,500$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE B

PRÉALABLE:

- $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 5$.

1. Donnons une valeur approchée de U_1:

$U_1 = f(U_0) = f(5) = \ln(999) \approx 6,91$.

Une valeur approchée de U_1 à 10^{-1} près est donc: $U_1 \approx 6,91$.

2. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10$ ".

Initialisation: Nous savons que $U_0 = 5$ et $U_1 \approx 6,91$.

D'où: $4 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 10$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10$ et montrons qu'alors $4 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 10$.

Supposons: $4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10$, pour un entier naturel n fixé. (1)

Freemaths : Tous droits réservés

D'où: $(1) \Rightarrow f(4) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(10)$

(f est croissante sur $[4;10]$)

$\Rightarrow \ln(511) \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \ln(7999)$

$\Rightarrow 4 \leqslant \ln(511) \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \ln(7999) \leqslant 10$

$\Rightarrow 4 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 10.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10$.

2. b. Déduisons-en que la suite (U_n) converge:

D'après la question précédente: $4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10$.

$$4 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 10 \iff \begin{cases} U_{n+1} \geqslant U_n \\ U_n \leqslant 10 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 10 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente.

3. Montrons que la suite (U_n) converge vers " α ":

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite l telle que:

$$f(l) = l.$$

Or: $f(l) = l \iff f(l) - l = 0$

$\iff g(l) = 0.$

Freemaths : Tous droits réservés

Or: $g(\ell) = 0$ admet une unique solution α.

Donc la limite de la suite (U_n) est: $\ell = \alpha$.

PARTIE C

1. Interprétons le résultat:

Ici: *alpha(8.499)* renvoie la valeur *11*.

Cela signifie que: c'est à partir du rang $n = 11$, que $U_n \geqslant 8,499$.

2. Expliquons pourquoi aucune valeur n'est alors renvoyée:

Un utilisateur exécute *alpha(8.6)*.

Aucune valeur ne sera alors renvoyée car: l'algorithme ne trouvera jamais un rang tel que $U_n > 8,6$ et par conséquent il ne donnera aucun rang.

Freemaths : Tous droits réservés