www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

POLYNÉSIE
2026

$f(x) = \ln(3x^2 + 1)$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$
- $\mathcal{D}f = [0; +\infty[$
- f est croissante sur $[0; +\infty[$
- f est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE A

1. Calculons U_1:

Nous savons que: • $U_{n+1} = \ln(3U_n^2 + 1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

• $U_0 = 2$.

Dans ces conditions: $U_1 = \ln(3U_0^2 + 1) = \ln(3 \times 4 + 1) = \ln(13)$.

Ainsi: $U_1 = \ln(13)$.

2. Émettons des conjectures:

Au vu du graphique, la suite (U_n) semble:

- être croissante sur $\mathbb{N}^*$
- être convergente et converger vers $\ell = 4$.

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$ ".

Initialisation: Nous savons que $U_0 = 2$ et $U_1 = \ln(13)$.

Or: $2 \leqslant \ln(13) \leqslant 4$.

D'où: $2 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 4$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n,
$2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$ et montrons qu'alors $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 4$.

Supposons: $2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $f(2) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(4)$

(f est croissante sur $[0; +\infty[$)

Freemaths : Tous droits réservés

$\Rightarrow \ln(13) \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \ln(49)$

$\Rightarrow 2 \leqslant \ln(13) \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant \ln(49) \leqslant 4$

$\Rightarrow 2 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 4.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

4. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente: $2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

$$2 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 4 \iff \begin{cases} U_{n+1} \geqslant U_n \\ U_n \leqslant 4 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 4 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente.

PARTIE B

PRÉALABLE:

- f est la limite de la suite (U_n)
- $g(x) = \ln(3x^2 + 1) - x$ $(\ln(U) + V)$
- $\mathcal{D}g = [0; +\infty[$

Freemaths : Tous droits réservés

• g dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. Calculons g' sur $\mathcal{D}g$:

Pour tout $x \in [0;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{6x}{3x^2+1} - 1$ $\left(\dfrac{u'}{u} + v'\right)$

$$= \frac{-3x^2+6x-1}{3x^2+1}.$$

Pour tout $x \in [0;+\infty[$, nous avons donc bien: $g'(x) = \dfrac{-3x^2+6x-1}{3x^2+1}$.

2. Montrons que " g " est strictement décroissante sur $[2;4]$:

Sur $[0;+\infty[$: $3x^2+1 > 0$.

Donc le signe de g' dépend uniquement du signe de " $-3x^2+6x-1$ ".

Or: $-3x^2+6x-1 = -3 \times (x-x_1) \times (x-x_2)$ $(\Delta = 2\sqrt{6})$

$$= -3 \times \left(x - \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right) \times \left(x - \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right).$$

D'où le tableau de signes de " g' " sur $[0;+\infty[$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Freemaths : Tous droits réservés

Comme l'intervalle $[2;4] \subset [x_2;+\infty[$, nous pouvons conclure que: la fonction g est bien strictement décroissante sur $[2;4]$.

3. a. Montrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution " α " sur $[2;4]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- g est continue sur $[0;+\infty[$, donc sur $[2;4]$,
- " $k = 0$ " est compris entre: $g(4) = \ln(49) - 4 < 0$

  et: $g(2) = \ln(13) - 2 > 0$,
- g est strictement décroissante sur $[2;4]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[2;4]$.

Au total, $g(x) = 0$ admet bien une unique solution α sur $[2;4]$.

3. b. Donnons la valeur de α:

La valeur arrondie à 10^{-2} près est: $\alpha \approx 3,78$.

Freemaths : Tous droits réservés