www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 3

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2026

26F113E

UN SYSTÈME DE CHAUFFAGE

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

PRÉALABLE:

- t = instant exprimé en dizaines de minutes
- $T(t)$ = température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t
- $\mathcal{D}_T = [0; +\infty[$
- $T(0) = 18$
- La fonction " T " est dérivable sur $\mathcal{D}_T$.

1. Donnons les solutions de l'équation différentielle (E):

L'équation différentielle (E) est: $y' = -0,035\,y + 0,91$.

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$)

sont les fonctions de la forme: $x \to C.e^{ax} + \frac{-b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Or ici: • $a = -0,035$

• $b = 0,91$.

D'où: $\frac{-b}{a} = 26$.

Ainsi, les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) sont:

$$h(t) = C \cdot e^{-0,035t} + 26, \; C \in \mathbb{R}.$$

2. Déduisons-en que $T(t) = 26 - 8\,e^{-0,035t}$, pour tout $t \in [0; +\infty[$:

D'après l'énoncé: $T(0) = 18$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$T(0) = 18 \iff h(0) = 18$

$\iff C \cdot e^0 + 26 = 18$

cad $C = -8$.

Ainsi, pour tout $t \in [0; +\infty[$, nous pouvons écrire: $T(t) = 26 - 8\,e^{-0,035t}$.

3. Combien de temps pour atteindre 20° C ?

Pour répondre à cette question, nous devons résoudre: $T(t) = 20$.

$T(t) = 20 \iff 26 - 8\,e^{-0,035t} = 20$

$\iff -8\,e^{-0,035t} = -6$

Freemaths : Tous droits réservés

$\iff e^{-0,035t} = 0,75$

$\iff -0,035 \times t = \ln(0,75)$

cad $t = \dfrac{\ln(0,75)}{-0,035} \approx 8,22.$

Ainsi, pour atteindre 20° C, il faudra environ 82 minutes soit:

1 heure & 22 minutes.

4. La température pourra-t-elle dépasser 28° C ?

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre l'inéquation:

$T(t) > 28.$

$T(t) > 28 \iff 26 - 8\,e^{-0,035t} > 28$

$\iff -8\,e^{-0,035t} > 2$

cad $e^{-0,035t} < -\dfrac{1}{4}.$

Or $e^{-0,035t} > 0$ toujours et donc: NON la température ne pourra jamais dépasser 28° C.

PARTIE B

Freemaths : Tous droits réservés

1. Montrons que $U_1 = 19,72$:

D'après l'énoncé: • $U_{n+1} = 0,965\ U_n + 35 + 0,07\ e^{-0,1n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 20$.

Dans ces conditions: $U_1 = 0,965 \times U_0 + 35 + 0,07\ e^{-0,1 \times 0}$

$= 19,72$.

Nous avons donc bien: $U_1 = 19,72$.

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 10$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n > 10$ ".

Initialisation: $U_0 = 20 > 10$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n > 10$ et montrons qu'alors $U_{n+1} > 10$.

Supposons: $U_n > 10$, pour un entier naturel n fixé. (1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $0,965 \times U_n > 0,965 \times 10$

$\Rightarrow$ $0,965 \times U_n + 0,35 > 9,65 + 0,35$

$\Rightarrow$ $0,965 \times U_n + 0,35 + 0,07\ e^{-0,1n} > 10 + 0,07\ e^{-0,1n} > 10$

Freemaths : Tous droits réservés

$\Rightarrow U_{n+1} > 10$.

Conclusion: *Pour tout entier naturel n, $U_n > 10$.*

3. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

Comme la suite (U_n) est décroissante nous pouvons écrire:

$$U_n \geq U_{n+1} > 10 \iff \begin{cases} U_n \geq U_{n+1} \\ U_n > 10 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est minorée par } m = 10 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: **la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ", $\ell \geq 10$.**

4. a. Justification:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$\ell = 0,965 \times \ell + 0,35 + 0,07 \times e^{-0,1n}$$

cad $\ell = 0,965 \times \ell + 0,35$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-0,1n} = 0$.

CQFD !

4. b. b_r Déterminons " ℓ ":

ℓ est telle que: $\ell = 0,965 \times \ell + 0,35$

Freemaths : Tous droits réservés

cad $f = 10$.

Ainsi: $f = 10$.

4. b. b_2. Interprétation:

Cela signifie qu'avec une durée sans chauffage très très longue, la température de la pièce se rapprochera et se stabilisera aux environs de 10 degrés Celsius.

5. a. Recopions et complétons les lignes 4, 5 et 6:

Nous avons:

```
1.  def marche() :
2.    n = 0
3.    u = 20
4.    while u > 18 :
5.      u = 0.965*u+0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
6.      n = n+1
7.    return n
```

5. b. Déterminons le temps à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche:

A l'aide d'une calculatrice, on obtient: $U_8 \approx 17,87$.

$U_8 \approx 17,87$, sachant que les termes précédents sont tous > 18.

En définitive, la fonction va renvoyer 8 et donc: il faudra 8 dizaines de minutes pour que le système de chauffage se remette en marche.

Freemaths : Tous droits réservés