

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 2 

ASIE

2022

$$f(t) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2t}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Calculons la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure:

Cela revient à calculer: U_1

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• $U_0 = 1$.

De plus: "toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité de médicament présente dans le sang **et** reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse".

Dans ces conditions: $U_1 = U_0 - 10\% U_0 + 0,25$

$$= 1 - (10\% \times 1) + 0,25$$

cad $U_1 = 1,15 \text{ mg}$.

Ainsi, la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure est de: 1,15 mg.

2. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0,9U_n + 0,25$:

- D'après l'énoncé: "une première injection de 1 mg".

D'où: $U_0 = 1 \text{ mg}$.

- De plus, toutes les 30 minutes:

- l'organisme élimine 10% de la quantité de médicament,
- et, il reçoit une dose supplémentaire de 0,25 mg de la substance médicamenteuse.

Soient:

- U_{n+1} , la quantité (en mg) de médicament dans le sang du patient au bout de $(n + 1)$ périodes de trente minutes,
- U_n , la quantité (en mg) de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes.

Pour tout entier naturel n , la quantité de médicament dans le sang au bout de $(n + 1)$ périodes de trente minutes est égale à celle au bout de n périodes de trente minutes diminuée de 10% et augmentée d'une nouvelle dose de 0,25 mg.

Pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 10\% U_n + 0,25 \text{ cad } U_{n+1} = 0,9U_n + 0,25.$$

Au total, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = 0,9U_n + 0,25$.

3. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1} < 5$:

Ici:

- $U_{n+1} = 0,9U_n + 0,25$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $U_0 = 1 \text{ mg}$

• $U_1 = 1,15 \text{ mg.}$

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n : $U_n \leq U_{n+1} < 5$ ".

Initialisation: $U_0 \leq U_1 < 5$?

Comme $0 \leq 1,15 < 5$, nous avons bien: $U_0 \leq U_1 < 5$.

Donc vrai au rang "0".

Héritéité: Supposons que pour un certain entier naturel n , $U_n \leq U_{n+1} < 5$ et montrons qu'alors $U_{n+1} \leq U_{n+2} < 5$.

Supposons: $U_n \leq U_{n+1} < 5$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 0,9U_n \leq 0,9U_{n+1} < 0,9 \times 5$$

$$\Rightarrow 0,9U_n \leq 0,9U_{n+1} < 4,5$$

$$\Rightarrow 0,9U_n + 0,25 \leq 0,9U_{n+1} + 0,25 < 4,5 + 0,25$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_{n+2} < 4,75$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_{n+2} < 5.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n , $U_n \leq U_{n+1} < 5$.

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n :

$$U_n \leq U_{n+1} < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} U_n \leq U_{n+1} \\ U_n < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est strictement majorée par } M = 5 \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers "9".

4. a. Recopions et complétons le script écrit en Python:

```
def efficace():
    u = 1
    n = 0
    while u < 1,8:
        u = 0,9 * u + 0,25
        n = n + 1
    return n
```

4. b. Déterminons la valeur renvoyée par ce script et interprétons:

Le script renvoie la valeur: $n = 8$ car $U_8 \approx 1,854 > 1,8$.

Cela signifie que le médicament est vraiment efficace après un nombre d'heures égal à 8×30 minutes = **4 heures**.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9:

Ici: $V_n = 2,5 - U_n \Leftrightarrow V_{n+1} = 2,5 - U_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow V_{n+1} = 2,5 - (0,9U_n + 0,25)$ (1).

Or: $V_0 = 2,5 - U_0$ cad $V_0 = 2,5 - 1 = 1,5$ et $U_n = 2,5 - V_n$.

D'où: (1) $\Leftrightarrow V_{n+1} = 2,5 - (0,9 \times [2,5 - V_n] + 0,25)$
 $= 0,9 V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 1,5$.

5. b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$:

- Comme $V_{n+1} = 0,9 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,9)^n$ cad $V_n = 1,5 \times (0,9)^n$.
- Comme $V_n = 1,5 \times (0,9)^n$ et $U_n = 2,5 - V_n$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2,5 - (1,5 \times (0,9)^n)$ cad $U_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

5. c. Le traitement présente-t-il un risque pour le patient ?

Le médicament est toxique à partir du moment où la quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg cad $U_n > 3$ mg.

Or: $U_n > 3$ mg $\Leftrightarrow 2,5 - 1,5 \times 0,9^n > 3$
 $\Leftrightarrow 1,5 \times 0,9^n < -0,5$ ce qui est impossible.

Dans ces conditions: il est impossible que la quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

Donc AUCUN risque pour le patient.

PARTIE B

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45mn ?

Le médicament est efficace ssi: $f(t) \geq 1,8 \text{ mg}$. (et: $f(t) < 3 \text{ mg}$)

Pour répondre à la question, nous devons calculer: $f(3 \text{ h } 45) = f(3,75)$.

$$f(3,75) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2 \cdot 3,75} \text{ car } f(t) = 2,5 - 1,5 e^{-0,2t}$$

$$= 1,791.$$

Comme $1,791 < 1,8$: le médicament n'est pas efficace au bout de 3 h 45mn.

2. Déterminons alors le temps nécessaire pour qu'il devienne efficace:

Comme déjà dit, le médicament est efficace à partir du moment où:

$$f(t) \geq 1,8 \text{ mg, avec } f(t) < 3 \text{ mg.}$$

$$f(t) \geq 1,8 \Leftrightarrow 2,5 - 1,5 e^{-0,2t} \geq 1,8$$

$$\Leftrightarrow 1,5 e^{-0,2t} \leq 0,7$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,2t} \leq \frac{0,7}{1,5}$$

$$\Leftrightarrow -0,2t \leq \ln\left(\frac{0,7}{1,5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,2t \geq 0,7621$$

cad $t \geq 3,81$ heures soit $t \geq 3$ heures 49 minutes.

Ainsi le médicament deviendra efficace à partir de:

3 heures et 49 minutes.

3. Comparons les résultats:

Dans le modèle discret, il faut 4 heures pour que le médicament devienne efficace.

Dans le modèle continu, il faut 3 heures 49 minutes pour que le médicament devienne efficace.

Nous choisirons donc le modèle continu: le médicament est plus rapidement efficace.