Spé Maths
Terminale

Espérance & Variance

MINI COURS

A. Variables aléatoires :

1. Définition d'une variable aléatoire :

Soit Ω l'univers cad l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire.
Une variable aléatoire sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. Définition d'une loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $\{ X = x_i \}$.

On présente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3	...	P_n

3. Exemple :

Une urne contient 3 boules : 2 rouges (R) et 1 blanche (B).

Soit l'expérience aléatoire consistant à tirer avec remise 3 boules, et X la variable aléatoire (v. a.) représentant le nombre de boules rouges tirées.

• Les valeurs que peut prendre la v. a. X sont: 0, 1, 2, 3.

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. X est:

$$X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, 3 \}.$$

• **Nous avons:** • $P(X=0) = P(BBB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$;

• $P(X=1) = P(RBB) + P(BRB) + P(BBR)$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{6}{27};$$

• $P(X=2) = P(RRB) + P(RBR) + P(BRR)$

$$= \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{12}{27};$$

• $P(X=3) = P(RRR) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.

Notons que: $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1.$

• **La loi de probabilité de la v. a. X est :**

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

B. Espérance Mathématique d'une variable aléatoire X :

1. Formule :

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est donnée par

la formule : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i$

$\Longleftrightarrow \quad E(X) = P_1 \times x_1 + P_2 \times x_2 + P_3 \times x_3 + \ldots + P_n \times x_n$.

2. Propriétés :

- $E(aX + b) = a\,E(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(aX + bY + c) = a\,E(X) + b\,E(Y) + c$.

3. Interprétation de E (X) :

- L'espérance représente la moyenne des résultats obtenus pour un jeu, lorsqu'on effectue un grand nombre de fois le jeu proposé.
- Un jeu est équitable quand: $E(X) = 0$.

4. Exemple :

Dans l'exemple précédent :

$$E(X) = \left(\frac{1}{27} \times 0\right) + \left(\frac{6}{27} \times 1\right) + \left(\frac{12}{27} \times 2\right) + \left(\frac{8}{27} \times 3\right) \Longleftrightarrow E(X) = 2.$$

C. Variance et écart type d'une variable aléatoire X :

1. Formule de la variance :

La variance d'une variable aléatoire X est donnée par la formule :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times (x_i - E(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

2. Propriétés :

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(X) \geqslant 0$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, si X et Y sont indépendantes
- $V(aX + bY + c) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$, si X et Y sont indépendantes
- $V(X) = 0$ signifie que X est une variable certaine.

3. Formule de l'écart type :

L'écart type d'une variable aléatoire X est donné par la formule :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

4. Exemple :

Dans l'exemple précédent :

- $V(X) = \left(\frac{1}{27} \times 0^2\right) + \left(\frac{6}{27} \times 1^2\right) + \left(\frac{12}{27} \times 2^2\right) + \left(\frac{8}{27} \times 3^2\right) - [E(X)]^2$

$$= \frac{126}{27} - [\ 2\ ]^2$$

$$= \frac{2}{3}.$$

• $\sigma\ (X) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$