Spé Maths
Terminale

Combinatoire & Dénombrement

MINI COURS

A. Cardinal d'un ensemble fini :

1. Définition :

Soit E un ensemble fini à " n " éléments: Card (E) = n.

2. Propriétés 1 :

Soit A et B deux ensembles finis quelconques:

- Card $(A \cup B)$ = Card (A) + Card (B) - Card $(A \cap B)$.
- Card $(A \times B)$ = Card (A) x Card (B).
- Card (A^k) = Card $(A)^k$.
- Card (A-B) = Card (A) - Card $(A \cap B)$.

3. Propriétés 2 :

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$, " p " ensembles finis deux à deux disjoints:

- Card $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p)$ = Card (A_1) + Card (A_2) + … + Card (A_p).
- Card $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p)$ = Card (A_1) x Card (A_2) x … x Card (A_p).

B. Nombre de k-uplets :

1. Définition :

Soit k un nombre entier naturel avec: $1 \leqslant k \leqslant n$.

Le nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments est:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1). \qquad \left(= \frac{n!}{(n-k)!} \right)$$

2. Exemple :

Le nombre de 5-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6\,720.$$

C. Permutations :

1. Définition :

Soit E un ensemble fini à " n " éléments.

Une permutation des éléments de E = un n-uplet d'éléments distincts de E.

2. Nombre de permutations :

Le nombre de permutations d'un ensemble fini à " n" éléments est:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1.$$

3. Propriétés :

- $0! = 1$
- $1! = 1.$

D. Combinaisons :

1. Définition :

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les " n " éléments de E est:

$$\binom{n}{k} = \left(\frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\right), \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

2. Propriétés :

- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$

E. Triangle de Pascal :

Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$