www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 1

ANTILLES-GUYANE
2026

MESSAGE REÇU

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

1. Recopions et complétons l'arbre de probabilité :

D'après l'énoncé, nous avons :

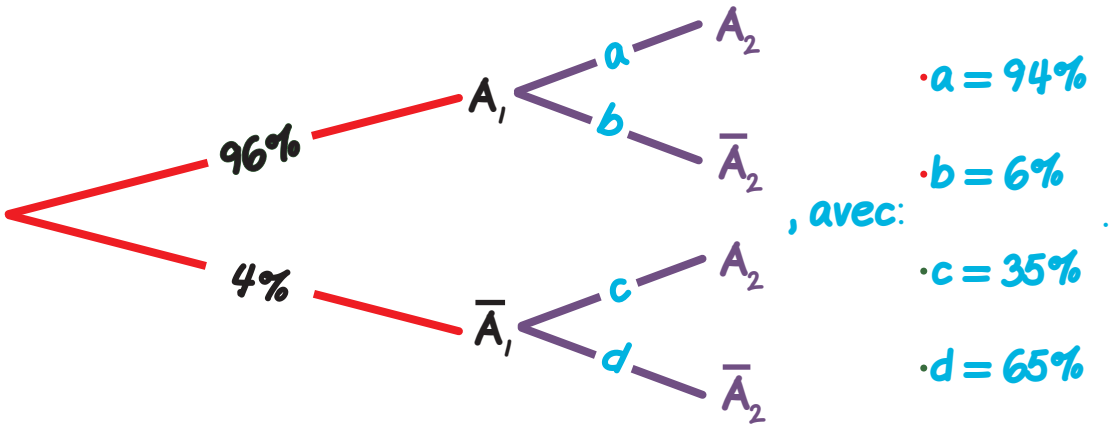
- A_1 = " le message reçu par le premier relais est sans erreur "
- A_2 = " le message reçu par le second relais est sans erreur ".

- $P(A_1) = 96\%$
- $P(\overline{A}_1) = 1 - 96\% = 4\%$.

- $P_{A_1}(A_2) = 94\%$
- $P_{A_1}(\overline{A}_2) = 1 - 94\% = 6\%$.

- $P_{\overline{A_1}}(A_2) = 35\%$
- $P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = 1 - 35\% = 65\%$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



, avec:

- $a = 94\%$
- $b = 6\%$
- $c = 35\%$
- $d = 65\%$.

2. Montrons que $P(A_2) = 0,9164$:

L'événement $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap \overline{A_1})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$$P(A_2) = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap \overline{A_1})$$

$$= P_{A_1}(A_2) \times P(A_1) + P_{\overline{A_1}}(A_2) \times P(\overline{A_1})$$

$$= 94\% \times 96\% + 35\% \times 4\%$$

$$= 91,64\%.$$

Nous avons donc bien: $P(A_2) = 91,64\%$.

Freemaths : Tous droits réservés

3. a. Calculons $P_{A_2}(\overline{A_1})$:

$$P_{A_2}(\overline{A_1}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{A_1})}{P(A_2)}$$

$$= \frac{P_{\overline{A_1}}(A_2) \times P(\overline{A_1})}{P(A_2)}$$

$$= \frac{35\% \times 4\%}{91,64\%}$$

$$= 1,53\%, \text{ arrondie à } 10^{-4} \text{ près.}$$

Ainsi: $P_{A_2}(\overline{A_1}) = 1,53\%$.

3. b. Interprétation:

Cela signifie que la probabilité que le message reçu par le premier relais soit " avec erreur " sachant que le message reçu par le second relais était " sans erreur " = 1,53 %.

PARTIE B

1. a. Déterminons $P(X = 4)$:

D'après l'énoncé, nous avons:

Freemaths : Tous droits réservés

- Probabilité qu'un test soit positif : $4\% = p$.
- Taille de l'échantillon choisi au hasard : $n = 50$.
- Nombre de tests réalisés suffisamment grand pour assimiler le choix à un tirage avec remise.

Ici, il s'agit de calculer $P(X = 4)$ sachant que :

- X est la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 50 tests associe le nombre de tests positifs,
- X suit **une loi binomiale** de paramètres : $n = 50$ et $p = 4\%$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici : $P(X = 4) = \binom{50}{4} (4\%)^4 \cdot (1 - 4\%)^{46}$

$$= \binom{50}{4} (0,04)^4 \cdot (0,96)^{46}$$

$$= \frac{50!}{4!\,46!} (0,04)^4 \cdot (0,96)^{46}$$

$$= \left(\frac{50 \times 49 \times 48 \times 47}{4 \times 3 \times 2} \right) \times (0,04)^4 \cdot (0,96)^{46}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$\approx 0,0901$.

La probabilité que 4 tests soient positifs est d'environ: 9,01 %.

1. b. Calculons P (X ⩾ 1):

Donner la probabilité qu'au moins un test soit positif dans cet échantillon revient à calculer: $P(X \geqslant 1)$.

Ici, il s'agit donc de calculer: $P(X \geqslant 1)$, avec $X \rightsquigarrow B(50; 4\%)$.

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{50}{0} (4\%)^0 \cdot (1 - 4\%)^{50}$$

$$= 1 - (96\%)^{50}$$

$$\approx 0,87.$$

La probabilité qu'au moins un test soit positif est d'environ: 87 %.

1. c. c_1. Calculons E (X):

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

Ici nous avons donc: $E(X) = 50 \times 4\%$

$= 2$ tests positifs.

1. c. c_2. Calculons V (X):

Freemaths : Tous droits réservés

D'après le cours: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Ici nous avons donc: $V(X) = 50 \times 4\% \times 96\%$

$= 1,92$ (tests positifs)^2.

2. a. a, Vérifions que $E(M) = 2$:

Nous savons que:

- $E(X) = 2$
- $V(X) = 1,92$
- $M = \dfrac{X_1 + X_2 \cdots + X_{25}}{25}$
- les X_i sont indépendantes.

Rappelons que d'après le cours:

- $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$
- $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$
- $E(a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c) = a \cdot E(X_1) + b \cdot E(X_2) + c$.

D'où ici: $E(M) = E\left(\dfrac{X_1 + X_2 \cdots + X_{25}}{25}\right)$

$= \dfrac{1}{25} \times [E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{25})]$

$= \dfrac{1}{25} \times 25 \times 2$

Freemaths : Tous droits réservés

$= 2.$

Ainsi, nous avons bien: $E(M) = 2.$

2. a. a_2. Montrons que $V(M) = 0,0768$:

Rappelons que si les X_i sont indépendantes, d'après le cours:

- $V(a \cdot X) = a^2 \cdot V(X)$
- $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$
- $V(a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c) = a^2 \cdot V(X_1) + b^2 \cdot V(X_2)$.

D'où ici: $V(M) = V\left(\dfrac{X_1 + X_2 \bullet\bullet\bullet + X_{25}}{25}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{25}\right)^2 \times V(X_1 + X_2 + \bullet\bullet\bullet + X_{25})$

$= \left(\dfrac{1}{25}\right)^2 \times [V(X_1) + V(X_2) + \bullet\bullet\bullet + V(X_{25})]$

$= \left(\dfrac{1}{25}\right)^2 \times 25 \times V(X)$

$= \dfrac{1,92}{25}$

$= 0,0768.$

Ainsi, nous avons bien: $V(M) = 0,0768.$

Freemaths : Tous droits réservés

2. b. Montrons que $P(-3 < M < 7) \geqslant 0,99$:

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord calculer:

$$P(-3 < M < 7).$$

$$P(-3 < M < 7) = P(-3 - E(M) < M - E(M) < 7 - E(M))$$

$$= P(-5 < M - E(M) < 5)$$

$$= P(|M - E(M)| < 5)$$

$$= 1 - P(|M - E(M)| \geqslant 5).$$

Dans ces conditions: $P(-3 < M < 7) \geqslant 0,99$

$$\Leftrightarrow P(|M - E(M)| \geqslant 5) \leqslant 0,01.$$

D'après **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons:

$$P(|M - E(M)| \geqslant 5) \leqslant \frac{V(M)}{5^2}$$

$$\text{cad} \quad P(|M - E(M)| \geqslant 5) \leqslant \frac{0,0768}{25}$$

$$\text{ou encore} \quad P(|M - E(M)| \geqslant 5) \leqslant 0,307\%.$$

Or: $0,307\% \leqslant 1 - 99\%.$

Donc: OUI, la probabilité que la moyenne des tests positifs soit strictement inférieure à 7 est donc supérieure à 99 %.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE C

Nous avons: • A_n = " le message reçu par le n-ième relais est sans erreur. "

• $p_n = P(A_n)$, avec $p_1 = 0,96$.

• $p_{n+1} = 0,59 \times p_n + 0,35$.

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} \leqslant p_n$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $p_{n+1} \leqslant p_n$ ".

Initialisation: $p_1 = 0,96$.

$p_2 = 0,59 \times p_1 + 0,35 = 0,59 \times 0,96 + 0,35 = \mathbf{0,9164}$.

Nous avons donc bien: $p_2 \leqslant p_1$

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel non nul n, $p_{n+1} \leqslant p_n$ et montrons qu'alors nous avons $p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$.

Supposons: $p_{n+1} \leqslant p_n$, pour un entier naturel $n \geqslant 1$ fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow$ $0,59 \times p_{n+1} \leqslant 0,59 \times p_n$

Freemaths : Tous droits réservés

$\Rightarrow 0,59 \times p_{n+1} + 0,35 \leqslant 0,59 \times p_n + 0,35$

$\Rightarrow p_{n+2} \leqslant p_{n+1}$.

Conclusion: Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n$.

2. Montrons que la suite (p_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n \iff \begin{cases} p_{n+1} \leqslant p_n \\ p_n \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (p_n) \text{ est décroissante sur } \mathbb{N}^* \\ (p_n) \text{ est minorée par } m = 0 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite décroissante et minorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (p_n) est bien convergente.

3. Déterminons la valeur exacte de sa limite:

Comme la suite (p_n) est convergente, elle admet une limite L telle que:

$$0,59 \times L + 0,35 = L.$$

$0,59 \times L + 0,35 = L \iff 0,41 \times L = 0,35$

cad $L = 0,8536$.

La suite (p_n) converge donc vers $L = 0,8536$.

Freemaths : Tous droits réservés