www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

AMÉRIQUE DU NORD
2026

SPOTIFY

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

1. Recopions et complétons l'arbre de probabilité :

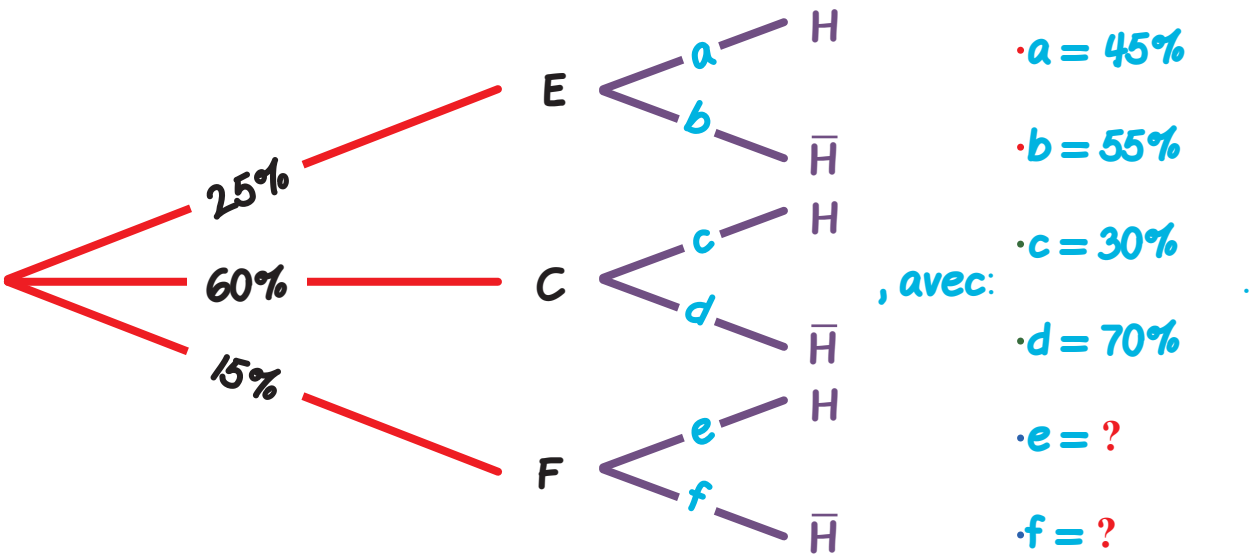
D'après l'énoncé, nous avons :

- E = " l'abonné a choisi l'abonnement **Étudiant** "
- C = " l'abonné a choisi l'abonnement **Classique** "
- F = " l'abonné a choisi l'abonnement **Famille** "
- H = " l'abonné a activé l'option **Écoute hors-ligne** ".

- $P(E) = 25\%$
- $P(C) = 1 - 25\% - 15\% = 60\%$
- $P(F) = 15\%$.

- $P_E(H) = 45\%$
- $P_C(H) = 30\%$.
- $P(F \cap H) = 12\%$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



2. Calculons la valeur exacte de $P(E \cap H)$:

$$P(E \cap H) = P_E(H) \times P(E)$$

$$= 45\% \times 25\%$$

$$= 11,25\%.$$

La valeur exacte de $P(E \cap H)$ est donc égale à: 11,25%.

3. Montrons que $P(H) = 0,4125$:

Freemaths : Tous droits réservés

L'événement " **Écoute hors-ligne** " est: $H = (H \cap E) \cup (H \cap C) \cup (H \cap F)$.

D'après la formule des **probabilité totales**:

$$P(H) = P(H \cap E) + P(H \cap C) + P(H \cap F)$$

$$= 11,25\% + P_C(H) \times P(C) + 12\%$$

$$= 41,25\%.$$

Ainsi, la probabilité demandée est bien de: 41,25%.

Freemaths : Tous droits réservés

4. Déterminons $P_H(E)$:

Déterminer la probabilité qu'un abonné ait choisi l'abonnement **Étudiant**, sachant qu'il a activé l'option **Écoute hors-ligne** revient à calculer: $P_H(E)$.

$$P_H(E) = \frac{P(H \cap E)}{P(H)}$$

$$= \frac{P(E \cap H)}{P(H)}$$

$$= \frac{11,25\%}{41,25\%}$$

$$= 27,3\%, \text{ arrondie au millième.}$$

Ainsi: $P_H(E) = 27,3\%$.

PARTIE B

1. Déterminons les paramètres de la loi binomiale suivie par X:

D'après l'énoncé, nous avons:

- Probabilité activation option **Écoute hors-ligne**: $41,25\,\% = p$.
- Taille de l'échantillon choisi au hasard et de manière indépendante: $n = 8$.
- Nombre d'abonnés suffisamment grand pour assimiler le choix à un tirage avec remise.

Ici la variable aléatoire X, donnant le nombre d'abonnés sur les 8 abonnés ayant activé l'option **Écoute hors-ligne**, suit donc une loi binomiale de paramètres: $n = 8$ et $p = 41,25\,\%$.

2. Calculons P (X = 0):

Calculer la probabilité qu'aucun des 8 abonnés n'ait activé l'option **Écoute hors-ligne** revient à déterminer: $P(X = 0)$, avec $X \rightsquigarrow B(8 ; 41,25\,\%)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

D'où: $P(X=0) = \binom{8}{0} (41{,}25\,\%)^0 . (1 - 41{,}25\,\%)^8$

$= (58{,}75)^8$

$\approx 1{,}4\,\%$.

Ainsi: $P(X=0) \approx 1{,}4\,\%$.

3. a. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = 1 - 0{,}5875^n$:

Ici:
- q_n = probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option Écoute hors-ligne.
- Échantillon = n abonnés, avec $n \geqslant 1$.

Dans ces conditions: $q_n = P(Z \geqslant 1)$, avec $Z \rightsquigarrow B(n; 41{,}25\,\%)$.

$q_n = P(Z \geqslant 1) = 1 - P(Z \leqslant 0)$

$= 1 - \binom{n}{0} (41{,}25\,\%)^0 . (1 - 41{,}25\,\%)^n$

$= 1 - (58{,}75\,\%)^n$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul: $q_n = 1 - (58{,}75\,\%)^n$.

3. b. Déterminons la plus petite valeur de " n ":

Ici, nous devons déterminer la valeur de n telle que: $q_n \geqslant 99{,}9\,\%$.

Freemaths : Tous droits réservés

$q_n \geqslant 99,9\% \iff 1 - (58,75\%)^n \geqslant 99,9\%$

$\iff n \times \ln(58,75\%) \leqslant \ln(0,1\%)$

$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(0,1\%)}{\ln(58,75\%)}$ car $58,75\% \in]0;1[$

cad $n \geqslant 13$ car $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la plus petite valeur de n recherchée est: $n = 13$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE C

Ici, la variable aléatoire Y est égale au montant payé manuellement par un abonné.

1. Donnons les 6 valeurs possibles prises par Y:

Un abonné à six possibilités:

- abonnement Étudiant = 5 €
- abonnement Étudiant + option = 5 € + 2 €
- abonnement Classique = 10 €
- abonnement Classique + option = 10 € + 2 €

- abonnement **Famille** = 16€
- abonnement **Famille** + **option** = 16€ + 2€.

Ainsi, les six valeurs possibles prises par Y sont:

5, 7, 10, 12, 16, 18.

2. La loi de probabilité de la variable aléatoire Y:

Préalablement, notons que: $P_F(H) = 80\%$ et $P_F(\overline{H}) = 20\%$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire Y est donc:

$Y = y_j$	5€	7€	10€	12€	16€	18€
$P(Y = y_j)$	a	b	c	d	e	f

Avec:
- $a = P(E \cap H) = 13,75\%$
- $b = P(E \cap \overline{H}) = 11,25\%$
- $c = P(C \cap H) = 42\%$
- $d = P(C \cap \overline{H}) = 18\%$
- $e = P(F \cap H) = 3\%$
- $f = P(F \cap \overline{H}) = 12\%$.

3. a. Montrons que $E(Y) = 10,475$:

Freemaths : Tous droits réservés

D'après la loi de probabilité de Y, nous avons:

$E(Y) = (5 \times a) + (7 \times b) + (10 \times c) + (12 \times d) + (16 \times e) + (18 \times f)$

$= 10,475.$

Nous avons donc bien: $E(Y) = 10,475$ €.

3. b. Interprétation:

Cela signifie qu'en moyenne un abonné rapporte 10, 48 € par mois à la plateforme.

4. Donnons V (Y):

D'après la loi de probabilité de Y, nous avons:

$V(Y) = (a \times 5^2) + (b \times 7^2) + (c \times 10^2) + (d \times 12^2) + (e \times 16^2) + (f \times 18^2)$
$- [E(Y)]^2$

$\approx 13,70.$

D'où la variable de Y est: $V(Y) \approx 13,70$ $(€)^2$.

5. a. Calculons V (Z):

D'après l'énoncé: • $E(Z) = 9$

• $\sigma(Z) = 2.$

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $V(Z) = [\sigma(Z)]^2 = 4$ $(€)^2$.

Freemaths : Tous droits réservés

5. b. Justifions que $P(6 < Z < 12) > 50\%$:

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord calculer:

$$P(6 < Z < 12).$$

$$P(6 < Z < 12) = P(6 - E(Z) < Z - E(Z) < 12 - E(Z))$$

$$= P(-3 < Z - E(Z) < 3)$$

$$= P(|Z - E(Z)| < 3)$$

$$= 1 - P(|Z - E(Z)| \geqslant 3).$$

Dans ces conditions: $P(6 < Z < 12) > 50\%$

$$\Leftrightarrow P(|Z - E(Z)| \geqslant 3) \leqslant 50\%.$$

D'après **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons:

$$P(|Z - E(Z)| \geqslant 3) \leqslant \frac{V(Z)}{3^2}$$

cad $$P(|Z - E(Z)| \geqslant 3) \leqslant \frac{4}{9}$$

ou encore $$P(|Z - E(Z)| \geqslant 3) \leqslant 0,444.$$

Or: $0,444 < 50\%$.

Donc: **OUI, le responsable a raison.**

Freemaths : Tous droits réservés