

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Arbres Pondérés



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

PARTIE GAGNÉE OU PERDUE ?

ÉNONCÉ

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'événement " la $n^{\text{ième}}$ partie est gagnée " et on note p_n la probabilité de cet événement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (U_n) par $U_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.