Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

MINI COURS

A. Définition d'une primitive F de f sur I :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$F' = f.$$

B. Propriété :

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

C. Les primitives G de f sur I :

Soit F une primitive de la fonction f sur I.

Toutes les primitives G de f sur I sont de la forme : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

D. La primitive qui s'annule en " a " :

Toutes les primitives G de f sur I sont de la forme : $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Déterminer la primitive de f qui s'annule en " a " revient à trouver le nombre réel " c " tel que : $G(a) = 0$.

E. Tableaux des primitives :

Tu dois connaître par ♥ les primitives F des fonctions f suivantes.

Tableau 1 :

f	F	I
k	$k \cdot x$	$\mathbb{R}$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	• $n \neq 0$ et $n \neq -1$ • si $n > 0$: $\mathbb{R}$ • $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$]0, +\infty[$

Tableau 2 :

f	F	Conditions
$k \cdot u'$	$k \cdot u$	
$u' + v'$	$u + v$	
$u' \cdot u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$	• $n \in \mathbb{N}$ • $n \neq 0$ • $n \neq -1$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	u strictement positive sur I
$\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{-1}{u}$	• $n \in \mathbb{N}$ • $n > 1$ • $u \neq 0$ sur I
$u' e^u$	e^u	
$\sin(ax + b)$	$\dfrac{-1}{a}\cos(ax + b)$	$a \neq 0$
$\cos(ax + b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax + b)$	$a \neq 0$

F. Intégrale d'une fonction continue :

1. Définition :

Soit f une fonction continue sur [a ; b] et soit F une primitive de f:

$$\int_{b}^{a} f(x)\,dx = [\,F(x)\,]_{b}^{a} = F(b) - F(a).$$

2. Valeur moyenne :

Pour toute fonction f continue sur [a ; b], la valeur moyenne de f sur [a ; b] est le réel μ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b - a} \cdot \int_{b}^{a} f(x)\,dx.$$

3. Propriétés essentielles :

- $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$, **quand f paire.**

- $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, **quand f impaire.**

- $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = - \int_{b}^{a} f(x)\,dx.$

- $\int_{a}^{b} (f(x) + g(x))\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx.$

- $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$

- ***CHASLES*:** $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$