Spé Maths
Terminale

Limites « d’une fonction f »

CORRIGÉ DE L’EXERCICE

GENDARMES 2

CORRECTION

a. Déterminons la limite de f en $-\infty$: $(x < 0)$

Ici: $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x} + 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

D'après le cours, nous savons que: $\cos(x) \in [-1; 1]$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant -\frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} + 1 \leqslant \frac{\cos(x)}{x} + 1 \leqslant -\frac{1}{x} + 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} + 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{-1}{x} + 1.$$

Or:

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x} + 1 = 1.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

b. Déterminons la limite de f en $+\infty$: $(x > 0)$

Comme $\cos(x) \in [-1; 1]$: $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x} + 1 \leqslant \frac{\cos(x)}{x} + 1 \leqslant \frac{1}{x} + 1$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x} + 1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x} + 1.$$

Or:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} + 1 = 1$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 1 = 1.$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons affirmer que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$