www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

MAYOTTE, RÉUNION
2026

ÉLEVAGE DE TRUITES

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

1. Calculons V_1 et V_2 :

D'après l'énoncé : • $V_{n+1} = 0,995\, V_n + 6$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $V_0 = 0$.

Dans ces conditions : • $V_1 = 0,995\, V_0 + 6 = 6$ litres

• $V_2 = 0,995\, V_1 + 6 = 11,97$ litres.

Ainsi, en litres : $V_1 = 6$ et $V_2 = 11,97$.

2. Recopions et complétons le programme :

Le programme complété pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin **après n heures** s'écrit :

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995*x+6
    return v
```

3. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$ ".

Initialisation: $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$.

Et: $0 \leqslant 6 \leqslant 1200$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$ et montrons qu'alors $V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 1200$.

Supposons: $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $V_n \times 0,995 \leqslant V_{n+1} \times 0,995 \leqslant 1200 \times 0,995$

$\Rightarrow$ $0,995 \times V_n + 6 \leqslant 0,995 \times V_{n+1} + 6 \leqslant 1200 \times 0,995 + 6$

$\Rightarrow$ $V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 1200$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200$.

Freemaths : Tous droits réservés

4. a. Justifions que la suite (V_n) est convergente:

D'après la question précédente, nous avons:

$$V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant 1200 \iff \begin{cases} V_n \leqslant V_{n+1} \\ V_n \leqslant 1200 \end{cases} \iff \begin{cases} (V_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (V_n) \text{ est majorée par } M = 1200 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (V_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

4. b. Calculons " ℓ ":

Comme la suite (V_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$\ell = 0,995 \times \ell + 6$$

cad $\ell = 1200$.

Ainsi, la valeur exacte de la limite est: $\ell = 1200$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE B

PRÉALABLE:

- t = instant exprimé en heure
- $v(t)$ = volume en litre, à l'instant t

- $\mathcal{D}_v = [\,0\,;+\infty\,[$
- $v\,(0) = 0$
- La fonction " v " est dérivable sur $\mathcal{D}_v$.

I. a. Déterminons les solutions de (E) sur $[\,0\,;+\infty\,[$:

L'équation différentielle (E) est: $y' = -0,005\,y + 6$.

D'après le cours, les fonctions solutions de $y' = ay + b$ ($a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$)

sont les fonctions de la forme: $x \to C \cdot e^{ax} + \dfrac{-b}{a}$, $C \in \mathbb{R}$.

Or ici: • $a = -0,005$

• $b = 6$.

D'où: $-\dfrac{b}{a} = 1200$.

Ainsi, les fonctions solutions de l'équation différentielle (E) sont:

$$h\,(t) = C \cdot e^{-0,005t} + 1200,\ C \in \mathbb{R}.$$

I. b. Montrons que pour tout $t \in [\,0\,;+\infty\,[$, $v\,(t) = 1200 \times (\,1 - e^{-0,005t}\,)$:

Bref cela revient à trouver le fameux C.

Or: $v\,(0) = 0$.

Freemaths : Tous droits réservés

D'où, nous avons: $v(0) = 0 \iff h(0) = 0$

$\iff C \cdot e^0 + 1200 = 0$

cad $C = -1200$.

Ainsi, pour $t \in [0; +\infty[$, nous avons bien: $v(t) = 1200 \times (1 - e^{-0,005t})$.

I. c. Calculons limite de v en $+\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} 1200 - 1200 \times e^{-0,005t}$$

$$= 1200 - 1200 \times \lim_{t \to +\infty} e^{-0,005t}$$

$$= 1200 \quad \text{car} \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-0,005t} = 0.$$

Ainsi, la limite de v en $+\infty$ est égale à: 1200 litres.

I. d. Déterminons le sens de variation de v sur $[0; +\infty[$:

D'après l'énoncé, v est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$v'(t) = h'(t) = 0,005 \times 1200\, e^{-0,005t}.$$

Comme pour tout $t \in [0; +\infty[$, $e^{-0,005t} > 0$, nous pouvons affirmer que:

$$v'(t) = 6\, e^{-0,005t} > 0.$$

Freemaths : Tous droits réservés

La fonction v est donc: strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Va-t-il procéder à ce nettoyage ?

Non never car la quantité de substance polluante ne dépassera jamais 1200 litres.

3. Déterminons la valeur exacte de l'instant:

La valeur exacte t, de l'instant au-delà duquel le volume de la substance dépasse 50 litres dans le bassin, est telle que:

$$v(t) = 50 \iff 1200 - 1200\, e^{-0,005t} = 50$$

$$\iff 1 - e^{-0,005t} = \frac{1}{24}$$

$$\iff e^{-0,005t} = \frac{23}{24}$$

$$\iff -0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right)$$

cad $t \approx 8,511$ heures.

Ainsi, la valeur exacte de l'instant est d'environ:

8,511 heures soit 8 heures et 31 minutes.

Freemaths : Tous droits réservés