www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

ANTILLES-GUYANE
2026

$$f_K(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f_k(x) = 1 - x + \frac{k(1+\ln x)}{x}$, avec $k > 0$
- $\mathcal{D}f_k =]0;+\infty[$
- f_k est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE A

1. Donnons les variations de F_2 sur $]0;3]$:

Le graphique représente la courbe $\mathcal{C}_2$ de la fonction f_2 avec:

$$f_2(x) = 1 - x + \frac{2(1+\ln x)}{x}.$$

f_2 correspond à la dérivée de F_2.

Or: • $f_2(x) < 0$ sur $]0;0,3]$

• $f_2(x) > 0$ sur $[0,3;2,5]$

• $f_2(x) < 0$ sur $[2,5;3]$.

D'où: • F_2 est décroissante sur $]0;03] \cup [2,5;3]$

• F_2 est croissante sur $[0,3;2,5]$.

2. Indiquons celle qui représente f_2' et celle qui représente f_2'':

• En ce qui concerne f_2':

f_2' correspond à la dérivée de la fonction f_2 sur $]0;3]$.

Or: • f_2 est croissante sur $]0;0,75]$

• f_2 est décroissante sur $[0;75;3]$.

Sur le graphique de la courbe I, nous avons:

• $f_2' \geq 0$ sur $]0;0,75]$

• $f_2' \leq 0$ sur $[0,75;3]$.

Ainsi: la courbe I est la courbe représentative de la fonction f_2'.

• En ce qui concerne f_2'':

f_2'' correspond à la dérivée seconde de f_2 sur $]0;3]$.

Freemaths : Tous droits réservés

D'après l'énoncé, le point **A d'abscisse** $x_A \approx 1,6$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_2$.

Or en ce point, la dérivée seconde s'annule et change de signe. C'est le cas **uniquement** sur **la courbe 2**.

Ainsi: **la courbe 2 est la courbe représentative de la fonction** f_2".

PARTIE B

1. a. Calculons $f_1'(x)$ **pour tout** $x \in]0;+\infty[$:

Nous avons: • $f_1(x) = 1 - x + \left(\dfrac{1+\ln x}{x} \right)$ $\left(U + \dfrac{V}{W} \right)$

• $\mathcal{D}f_1 =]0;+\infty[$.

D'après l'énoncé, f_1 est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f_1'(x) = -1 + \left[\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times x - (1+\ln(x)) \times (1)}{x^2} \right) \right]$$

$$\left(U' + \frac{V' \times W - V \times W'}{W^2} \right)$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= -1 - \frac{\ln x}{x^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, nous avons bien: $f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}$.

1. b. Déterminons la limite de $f_1'(x)$ en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f_1'(x) = \lim_{x \to +\infty} -1 - \frac{\ln x}{x^2}$$

$= -1$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, d'après les croissances comparées (cours).

Ainsi: $\lim_{x \to +\infty} f_1'(x) = -1$.

2. a. a_1. Justifions les variations de f_1' sur $]0;+\infty[$:

Étape 1: on calcule f_1'' sur $]0;+\infty[$

D'après l'énoncé, f_1 est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

De plus sur $]0;+\infty[$: $f_1'(x) = -1 - \frac{\ln x}{x^2}$. $\left(U + \frac{V}{W}\right)$

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f_1''(x) = 0 - \left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right) \times (x^2) - (\ln x) \times (2x)}{x^4}\right]$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$\left(U' + \frac{V' \times W - V \times W'}{W^2} \right)$$

$$= \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3}.$$

D'où pour tout $x \in]0 ; +\infty[$: $f_1''(x) = \frac{1}{x^3} \times (-1 + 2 \ln x)$.

Étape 2 : signe de f_1''

Sur $]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x^3} > 0$.

Donc le signe de f_1'' dépend uniquement du signe de $-1 + 2 \ln x$.

Distinguons deux cas :

- $-1 + 2 \ln x \geqslant 0$ ssi $\ln x \geqslant \frac{1}{2}$ cad ssi $x \geqslant e^{0,5}$,
- $-1 + 2 \ln x \leqslant 0$ ssi $\ln x \leqslant \frac{1}{2}$ cad ssi $x \leqslant e^{0,5}$.

Ainsi : • f_1' est décroissante sur $]0 ; e^{0,5}]$

• f_1' est croissante sur $[e^{0,5} ; +\infty[$.

Étape 3 : les limites de f_1' en " 0^+ " et en " $+\infty$ "

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1'(x) = -1$ (question précédente).
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -1 - \frac{\ln x}{x^2}$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= -1 - \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^2}.$$

Or, d'après le cours: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$.

D'où: $\lim_{x \to 0^+} f_1'(x) = -1 - (-\infty) = +\infty$.

Nous venons de justifier les variations de f_1' sur $]0 ; +\infty[$.

2. a. a_2. Déterminons la valeur de l'extremum:

L'extremum de f_1' sur $]0 ; +\infty[$ est un minimum:

le point $A\left(e^{0,5} ; -1 - \frac{1}{2e}\right)$.

$\left(-1 - \frac{1}{2e} = f_1'(e^{0,5})\right)$

2. b. Justifions la limite de f_1' en 0:

Fait question précédente.

2. c. c_1. Montrons qu'il existe une unique solution " α " pour $f_1'(x) = 0$ sur $]0 ; +\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Freemaths : Tous droits réservés

Notons que la fonction f_1' s'annule sur l'intervalle $]0\,;\,e^{1/2}]$.

Ici: • f_1' est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc sur $]0\,;\,e^{1/2}]$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $f_1'(e^{1/2}) = -1 - \dfrac{1}{2e}$

et: $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1'(x) = +\infty$,

• f_1' est strictement décroissante sur $]0\,;\,e^{1/2}]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f'_1(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]0\,;\,e^{1/2}]$.

Au total, $f_1'(x) = 0$ admet bien une unique solution α sur $]0\,;\,e^{1/2}]$, donc sur $]0\,;+\infty[$.

2. c. c_2. Déduisons-en que f_1 admet un maximum sur $]0\,;+\infty[$:

Du fait de la question précédente, nous pouvons affirmer que la fonction f_1 admet un maximum sur $]0\,;+\infty[$: le point $A(\alpha\,;f_1(\alpha))$.

2. d. Recopions et complétons le programme:

Le programme écrit en langage Python qui renvoie une valeur approchée à 10^{-2} près de la solution α de l'équation $f_1'(x) = 0$ sur $]0\,;+\infty[$ s'écrit:

Freemaths : Tous droits réservés

```
def d(x) :
    return -1-ln(x)/x**2

def alpha() :
    u = 0.5
    while d(u)  > 0 :
        u = u + 0.01
    return u
```

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE C

1. Montrons que H est une primitive de h:

Sur $]0;+\infty[$: $h(x)=\dfrac{1+\ln(x)}{x}$ et $H(x)=\dfrac{1}{2}(1+\ln x)^2$.

H est une primitive de h ssi: $H'(x)=h(x)$.

Or: $H'(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\times(1+\ln x)^{(2-1)}\times\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\frac{1+\ln(x)}{x}.$$

Comme $H'(x)=h(x)$, H est bien une primitive de h.

2. Déterminons " k " tel que $\frac{1}{e-1}\int_1^e f_k(x)\,dx = 0$:

$$\left(\frac{1}{e-1}\right)\int_1^e f_k(x)\,dx = 0 \iff \left(\frac{1}{e-1}\right) x \int_1^e \left(1 - x + k\frac{(1+\ln x)}{x}\right) dx = 0$$

$$\iff \left(\frac{1}{e-1}\right) x \left[x - \frac{x^2}{2} + k \times H(x)\right]_1^e = 0$$

$$\iff \left(\frac{1}{e-1}\right) x \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{k}{2}(1+\ln x)^2\right]_1^e = 0$$

$$\iff \frac{2e - e^2 + 3k - 1}{2(e-1)} = 0$$

cad $2e - e^2 + 3k - 1 = 0$

ou encore $k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} > 0.$

Il existe donc bien une valeur de k: $k = \frac{e^2 - 2e + 1}{3} > 0.$

Freemaths : Tous droits réservés