www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

ANTILLES-GUYANE
2026

$$f_a(x) = x \ln(ax - 1)$$

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

1. Déterminons $f'(1)$:

Graphiquement, la tangente T à $\mathcal{C}$ passe par deux points :

$A(1;0)$ et $B(0;-2)$.

Dans ces conditions, nous avons : $f'(1) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$= \frac{-2-0}{0-1}$$

$$= 2.$$

Ainsi, $f'(1)$ est égal à : 2.

2. La fonction f est-elle concave sur $\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$?

Non: elle est concave sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$ puis convexe sur $[1; +\infty[$.

3. Déterminons $f''(1)$:

Nous pouvons affirmer que: $f''(1) = 0$ car A est un point d'inflexion.

PARTIE B

Freemaths : Tous droits réservés

PRÉALABLE:

- $f(x) = x \ln(2x - 1)$
- $\mathcal{D}_f = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$
- f est deux fois dérivables sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

1. a. Déterminons la limite de f en "$\frac{1}{2}$":

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} x \times \ln(2x - 1).$$

Posons: $X = 2x - 1$ et donc $x = \frac{X + 1}{2}$.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (2x - 1) = \lim_{X \to 0^+} X.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{X \to 0^+} \left(\frac{X+1}{2} \right) \times \ln X$

$$= \left(\frac{1}{2} \lim_{X \to 0^+} X \ln X \right) + \left(\frac{1}{2} \lim_{X \to 0^+} \ln X \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 0^+ + \frac{1}{2} \times -\infty$$

$$= -\infty.$$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty.$

1. b. Interprétation:

Cela signifie que: la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}$.

2. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathcal{D}_f$:

Sur $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$: $f(x) = 0 \iff x \ln(2x-1) = 0$

$\iff \ln(2x-1) = 0$ car $x \neq 0$

$\iff 2x - 1 = e^0$

cad $x = 1$.

Freemaths : Tous droits réservés

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution: $x = 1$.

3. a. Calculons f'' sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

Nous savons que sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$: • $f'(x) = \ln(2x-1) + \frac{2x}{2x-1}$

$\left(U + \frac{V}{W}\right)$

• f' est deux fois dérivable.

Dans ces conditions, sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$: $f''(x) = \frac{2}{2x-1} + \left[\frac{(2)\times(2x-1) - (2x)\times(2)}{(2x-1)^2}\right]$

$\left(U' + \frac{V'\times W - V\times W'}{W^2}\right)$

$= \frac{2\times(2x-1) + 2\times(2x-1) - 4x}{(2x-1)^2}$

$= \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$.

Ainsi pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$: $f''(x) = \frac{4(x-1)}{(2x-1)^2}$.

3. b. Montrons que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion:

Freemaths : Tous droits réservés

D'après le cours, si f'' s'annule et change de signe en a alors C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici: $f''(x) = 0$ ssi $4(x - 1) = 0$ cad ssi $x = 1$.

Ainsi, la valeur exacte du point d'inflexion est: $x = 1$.

Il s'agit en fait du point $A(1; 0)$.

Ce point A est bien le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

4. a. Montrons que f est positive sur $]1; 2]$:

Si $x \in]1; 2]$: $1 < x \leqslant 2 \iff 2 < 2x \leqslant 4$

$\iff 1 < 2x - 1 \leqslant 3$

$\iff \ln(1) < \ln(2x - 1) \leqslant \ln(3)$

$\iff 0 < \ln(2x - 1) \leqslant \ln(3)$.

Donc sur $]1; 2]$, $\ln(2x - 1) > 0$.

Comme sur $]1; 2]$, $x > 0$: $x \times \ln(2x - 1) > 0$.

Donc sur $]1; 2]$: $f(x) > 0$.

4. b. Montrons que $\int_1^2 \frac{x^2}{2x - 1}\,dx = 1 + \frac{1}{8}\ln(3)$:

Nous savons que: $\frac{x^2}{2x - 1} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x - 1}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Dans ces conditions: $\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{2}{2x-1}\right) dx$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2}x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{4}\,dx + \frac{1}{8}\int_1^2 \frac{2}{2x-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{4}[x]_1^2 + \frac{1}{8}[\ln(2x-1)]_1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{8}\ln(3).$$

Nous avons donc bien: $\int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\,dx = 1 + \frac{1}{8}\ln(3)$.

4. c. Déterminons la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire:

$\mathcal{A}$ correspond à l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Ici nous devons calculer: $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x \times \ln(2x-1)\,dx$.

Procédons à une **IPP**.

Posons: • $U(x) = \ln(2x-1)$, d'où $U'(x) = \frac{2}{2x-1}$

• $V'(x) = x$, d'où $V(x) = \frac{x^2}{2}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Dans ces conditions: $\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} \times \ln(2x-1)\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{2}{2x-1}\right) \times \left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

$$= 2\ln(3) - \int_1^2 \frac{x^2}{2x-1}\, dx$$

$$= 2\ln(3) - \left(1 + \frac{1}{8}\ln(3)\right)$$

$$= -1 + \frac{15}{8}\ln(3).$$

En unité d'aire: $\mathcal{A} = -1 + \frac{15}{8}\ln(3)$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE C

PRÉALABLE:

- $f_a(x) = x\ln(ax-1)$, $a > 0$
- $\mathcal{D}_{f_a} = \left]\frac{1}{a}; +\infty\right[$
- f_a est deux fois dérivable
- $f_a''(x) = \frac{a(ax-2)}{(ax-1)^2}$.

1. Montrons que $\mathcal{C}_a$ admet un unique point d'inflexion A_a:

D'après le cours, si f'' s'annule et change de signe en a alors C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse: $x = a$.

Ici: $f''_a(x) = 0$ ssi $a(ax - 2) = 0$ cad ssi $x = \frac{2}{a}$ car $a > 0$.

Ainsi, la valeur exacte de l'unique point d'inflexion est: $x_a = \frac{2}{a}$.

Il s'agit en fait du point $A_a\left(\frac{2}{a}; 0\right)$.

2. Montrons que les points A_a sont alignés avec $a \in]0; +\infty[$:

Les points A_a sont tous alignés car ils ont tous pour ordonnée $y_a = 0$ et par conséquent ils sont tous situés sur l'axe des abscisses.

Freemaths : Tous droits réservés