www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD
2026

$f(x) = x\,(\ln x)^2$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f(x) = x\,(\ln x)^2$ $(U \times V^2)$
- $\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$
- f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

1. Déterminons la limite de "f" en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\,(\ln x)^2$$

$= +\infty$, d'après le cours: $(+\infty) \times (+\infty)$

Ainsi: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Montrons que pour tout $x > 0$, $f(x) = 4\,(g(\sqrt{x}))^2$:

Pour tout $x > 0$: $g(x) = x \ln(x)$.

Dans ces conditions, pour tout $x > 0$: $4 \times (g(\sqrt{x}))^2 = 4 \times (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$

Freemaths : Tous droits réservés

$= 4 \times x \times (\ln(\sqrt{x}))^2$

$= x \times (2 \times \ln(\sqrt{x}))^2$

$= x \times (\ln(x))^2$

$= f(x)$.

Au total pour tout $x > 0$ nous avons bien: $f(x) = 4 \times (g(\sqrt{x}))^2$.

2. b. Déduisons-en $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 4 \times (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$$

$$= \lim_{X \to 0^+} 4 \times (X \ln(X))^2, \quad \text{en posant: } X = \sqrt{x}$$

$$= 4 \times (0)^2$$

$$= 0.$$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

3. a. Calculons f' sur $]0; +\infty[$:

f est dérivable sur $]0; +\infty[$, d'où nous avons:

$$f'(x) = (1) \times (\ln(x))^2 + (x) \times \left(2 \ln(x) \times \frac{1}{x}\right) \quad (U' \times V + U \times 2 \times V \times V')$$

$$= \ln(x) \times (\ln(x) + 2).$$

Freemaths : Tous droits réservés

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, nous avons donc bien: $f'(x) = \ln(x) \times (\ln(x) + 2)$.

3. b. Les variations de f sur $]0;+\infty[$:

Nous avons: • f est croissante sur $]0;e^{-2}] \cup [1;+\infty[$
car $f'(x) \geq 0$ sur $]0;e^{-2}] \cup [1;+\infty[$

• f est décroissante sur $[e^{-2};1]$
car $f'(x) \leq 0$ sur $[e^{-2};1]$.

D'où le tableau de variation suivant:

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↗	a	↘	b	↗	$+\infty$

• $a = f(e^{-2}) = 4e^{-2}$

• $b = f(1) = 0$.

3. c. Donnons une valeur exacte du max sur $]0;1]$:

Le maximum de f sur $]0;1]$ est le point de coordonnées: $(e^{-2};4e^{-2})$.

Freemaths : Tous droits réservés

5. a. Interprétation de $I = \int_a^l f(x)\,dx$:

I correspond à l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = l$, par l'axe des abscisses et la courbe.

5. b. Justifions l'égalité demandée:

Via une IPP, calculons $I = \int_a^l f(x)\,dx$.

$$I = \int_a^l f(x)\,dx = \int_a^l x\,(\ln(x))^2\,dx.$$

Posons: • $U(x) = (\ln(x))^2$, d'où $U'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$

• $V'(x) = x$, d'où $V(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Dans ces conditions: $$I = \left[\left(\frac{x^2}{2}\right) \times (\ln(x))^2\right]_a^l - \int_a^l \left(\frac{2\ln(x)}{x}\right) \times \left(\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} \times (\ln(a))^2 - \underbrace{\int_a^l x\ln(x)\,dx}_{J}.$$

CQFD!

5. c. Déduisons-en la valeur de I:

Freemaths : Tous droits réservés

Procédons à une seconde **IPP** pour le calcul de: $J = \int_a^1 x \ln(x)\, dx$.

Posons: • $U(x) = \ln(x)$, d'où $U'(x) = \frac{1}{x}$

• $V'(x) = x$, d'où $V(x) = \frac{x^2}{2}$.

Dans ces conditions: $J = \left[\left(\frac{x^2}{2}\right) \times (\ln(x))\right]_a^1 - \int_a^1 \left(\frac{1}{x}\right) \times \left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

$$= -\frac{a^2}{2} \times \ln(a) - \int_a^1 \frac{x}{2}\, dx$$

$$= -\frac{a^2}{2} \times \ln(a) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^1$$

$$= -\frac{a^2}{2}\ln(a) + \frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Au total, nous obtenons: $I = -\frac{a^2}{2} \times (\ln(a))^2 - J$

$$= -\frac{a^2}{2}(\ln(a))^2 + \frac{a^2}{2}\ln(a) - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

5. d. Déterminons la limite de I quand " a " tend vers 0:

$$\lim_{a \to 0} I = \left(\lim_{a \to 0} -\frac{a^2}{2}(\ln(a))^2\right) + \left(\lim_{a \to 0} \frac{a^2}{2}\ln(a)\right) + \frac{1}{4}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= 0 + 0 + \frac{1}{4}.$$

$$= \frac{1}{4}.$$

Au total: $\lim\limits_{a \to 0} I = \frac{1}{4}$.

Freemaths : Tous droits réservés