www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

AMÉRIQUE DU NORD
2026

$$f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

1. Résolvons l'équation $f(x)=x$:

Sur $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$. $\left(\frac{u}{v}\right)$

Dans ces conditions: $f(x)=x \iff \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}=x$

$$\iff \frac{4x^2}{1+x^2}=x^2$$

$$\iff 4x^2=x^2 \times (1+x^2)$$

$$\iff x^2 \times (x^2-3)=0$$

$$\iff x^2 \times (x-\sqrt{3}) \times (x+\sqrt{3})=0.$$

L'équation $f(x)=x$ admet donc 3 solutions: $x=0$, $x=\sqrt{3}$ et $x=-\sqrt{3}$.

2. a. Calculons f' sur $\mathbb{R}$:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où: $f'(x) = \dfrac{(2 \times \sqrt{1+x^2}) - \left(2x \times \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}$

$\left(\dfrac{U' \times V - U \times V'}{V^2}\right)$

$= \dfrac{2 \times (1+x^2) - 2x^2}{\sqrt{1+x^2} \times (1+x^2)}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2} \times (1+x^2)}$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons bien: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+x^2} \times (1+x^2)}$.

2. b. Déduisons-en le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2}{(1+x^2) \times \sqrt{1+x^2}}$.

Or sur $\mathbb{R}$: • $2 > 0$

• $1 + x^2 > 0$

• $\sqrt{1+x^2} > 0$.

Donc sur $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$.

Ainsi: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE B

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3}$:

Nous avons: • $U_{n+1} = f(U_n) = \dfrac{2}{\sqrt{1+U_n^2}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 1$

• **f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3}$ ".

Initialisation: Nous savons que $U_0 = 1$ et $U_1 = \sqrt{2}$.

D'où: $1 \leqslant U_0 \leqslant U_1 < \sqrt{3}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3}$ et montrons qu'alors $1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < \sqrt{3}$.

Supposons: $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3}$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $f(1) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) < f(\sqrt{3})$

(f est strictement croissante)

Freemaths : Tous droits réservés

$$\Rightarrow \sqrt{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < \sqrt{3}.$$

Conclusion: Pour tout naturel n, $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. a. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente: $1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3}$.

$$1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} < \sqrt{3} \iff \begin{cases} U_{n+1} \geqslant U_n \\ U_n < \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente.

2. b. Déterminons sa limite:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet pour limite l telle que:

$$l = f(l).$$

$$l = f(l) \iff l = \frac{2l}{\sqrt{1+l^2}}. \quad (1)$$

Or l'équation (1) admet 3 solutions: $l = -\sqrt{3}$, $l = 0$ et $l = \sqrt{3}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Comme $\ell \in [\,1\,;\sqrt{3}\,]$, nous retiendrons comme limite pour (U_n): $\ell = \sqrt{3}$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison " $q = 4$ ":

$$V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2} \iff V_{n+1} = \frac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2}$$

$$\iff V_{n+1} = \bullet\bullet\bullet$$

$$\iff V_{n+1} = 4 \times \left(\frac{U_n^2}{3 - U_n^2} \right)$$

$$\iff V_{n+1} = 4 \times V_n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus: $V_0 = \dfrac{U_0^2}{3 - U_0^2} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent: (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $V_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. b. b_1. Déduisons-en V_n en fonction de " n ":

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons: $V_n = q^n \times V_0$ cad $V_n = 0,5 \times 4^n$.

3. b. b_2. Déduisons-en U_n en fonction de " n ":

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \dfrac{U^2_n}{3 - U_n^2}$.

Freemaths : Tous droits réservés

D'où: $U_n = \sqrt{\dfrac{3\,V_n}{1+V_n}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En remplaçant V_n par $0,5 \times 4^n$, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = \sqrt{\frac{1,5 \times 4^n}{1+0,5 \times 4^n}}.$$

3. c. Déduisons-en la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1,5}{\left(\frac{1}{4^n}\right)+0,5}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{1,5}{0,5}} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$$

$$= \sqrt{3}.$$

Ainsi: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3}$.

PARTIE C

1. Recopions et complétons le script:

Le script Python permettant de lister les p premiers termes de la suite (S_n) est:

Freemaths : Tous droits réservés

```
from math import*

def termes(p) :
    u = 1
    S = 0
    L = [ ]
    for i in range(p) :
        S = S+u**2
        u = 2*u/sqrt(1+u**2)
        L.append(S)
    return L
```

Freemaths : Tous droits réservés

2. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant S_n \leqslant 3n$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \underbrace{U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_{n-1}^2}_{n \text{ termes}}$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant U_k \leqslant \sqrt{3}$.

Dans ces conditions: $1^2 \leqslant U_k^2 \leqslant (\sqrt{3})^2$ **cad** $1 \leqslant U_k^2 \leqslant 3$.

D'où:
- $1 \leqslant U_0^2 \leqslant 3$
- $1 \leqslant U_1^2 \leqslant 3$
- $1 \leqslant U_2^2 \leqslant 3$
- •
- •
- •
- $1 \leqslant U_{n-1}^2 \leqslant 3$.

En additionnant les **n termes**, nous obtenons:

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \leqslant U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n-1}^2 \leqslant 3 + 3 + 3 + \ldots + 3$$

cad $n \times 1 \leqslant S_n \leqslant n \times 3$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons donc bien: $n \leqslant S_n \leqslant 3n$.

3. Déduisons les limites de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3n$

$= +\infty$.

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3n}{n^2}$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3}{n}$

$= 0$.

D'où: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^2} = 0$.

Freemaths : Tous droits réservés