www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2026

$$f(x) = a + b \times \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f(x) = a + \dfrac{b \ln(x+1)}{x+1}$ $\left(U + \dfrac{V}{W}\right)$
- $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE A

1. Justifions que $a = 1$:

Nous savons que la courbe de la fonction f passe par le point: $x_A = 0$ et $y_A = 1$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire:

$$y_A = a + b \times \frac{\ln(x_A+1)}{x_A+1} \iff 1 = a + b \times \frac{\ln(1)}{1}$$

cad $a = 1$.

D'où nous avons bien: $a = 1$.

2. a. Donnons la valeur de $f'(0)$:

Graphiquement, la tangente T_A passe par deux points:

$$A(0;1) \quad \text{et} \quad B(1;5).$$

Dans ces conditions, nous avons: $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$$= \frac{5 - 1}{1 - 0}$$

$$= 4.$$

Ainsi, $f'(0)$ est égal à: 4.

2. b. Donnons le signe de $f''(1)$:

Sur l'intervalle $[0;2]$, f est **concave**.

D'où, d'après le cours, nous pouvons affirmer que: $f''(1) \leqslant 0$.

3. a. Calculons f':

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]-1;+\infty[$:

Freemaths : Tous droits réservés

$$f'(x) = b \times \left[\frac{\left(\frac{1}{x+1} \right) \times (x+1) - (\ln(x+1)) \times (1)}{(x+1)^2} \right]$$

$$\left(U' + \frac{V' \times W - V \times W'}{W^2} \right)$$

$$= b \times \frac{[1 - \ln(x+1)]}{(x+1)^2}.$$

Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, nous avons bien: $f'(x) = b \times \frac{[1 - \ln(x+1)]}{(x+1)^2}$.

3. b. Déduisons-en la valeur de " b ":

Nous savons que: $f'(0) = 4$.

$$f'(0) = 4 \iff 4 = b \times \frac{[1 - \ln(0+1)]}{(0+1)^2}$$

cad $b = 4$.

Ainsi: $b = 4$.

PARTIE B

Freemaths : Tous droits réservés

PRÉALABLE:

• $f(x) = 1 + \dfrac{4\ln(x+1)}{(x+1)}$

• $\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[$.

1. Montrons que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$:

D'après le cours, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, la courbe représentative de f

admet une asymptote horizontale en $+\infty$: $y = l$.

Ici: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4\ln(x+1)}{(x+1)}$

$= 1$, d'après les croissances comparées.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$.

2. Résolvons l'inéquation demandée:

Sur $]-1;+\infty[$: $1 - \ln(x+1) > 0 \iff \ln(x+1) < 1$

$\iff e\ln(x+1) < e^1$

$\iff x + 1 < e$

cad $x < e - 1$.

Ainsi, sur $]-1;+\infty[$, l'ensemble des solutions est: $]-1; e-1[$.

Freemaths : Tous droits réservés

3. Dressons le tableau de variation de f:

Nous savons que la dérivée de f sur $]-1;+\infty[$ est:

$$f'(x) = b \times \frac{[1-\ln(x+1)]}{(x+1)^2}.$$

Or: $b = 4$.

D'où sur $]-1;+\infty[$: $f'(x) = 4 \times \frac{[1-\ln(x+1)]}{(x+1)^2}$.

A la question précédente, nous avons montré que:

$1-\ln(x+1) > 0$ sur $]-1;e-1[$.

Et donc: $1-\ln(x+1) \leqslant 0$ sur $[e-1;+\infty[$.

Comme $\frac{4}{(x+1)^2} > 0$: • $f'(x) \geqslant 0$ sur $]-1;e-1]$

• $f'(x) \leqslant 0$ sur $[e-1;+\infty[$.

Dans ces conditions: • f est croissante sur $]-1;e-1]$

• f est décroissante sur $[e-1;+\infty[$.

Et le tableau de variation de f sur $]-1;+\infty[$ est:

Freemaths : Tous droits réservés

x	-1		$e-1$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$f(e-1)$	↘	1

, $f(e-1) = 1 + \frac{4}{e}$.

La fonction f admet comme extremum le point: $R\left(e-1 ; 1+\frac{4}{e}\right)$.

R est un maximum pour f sur $\mathcal{D}_f$.

4. Montrons que $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur $[2 ; +\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a ; b]$ ou $I =]a ; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- f est continue sur $\mathcal{D}_f$ donc sur $[2 ; +\infty[$,
- " $k = 1,5$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

et: $f(2) = 1 + 4\,\frac{\ln(3)}{3}$,

- f est strictement décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 1,5$ ($k = 1,5$) admet bien une unique solution α appartenant à $[2 ; +\infty[$.

Au total, $f(x) = 1,5$ admet bien une unique solution α sur $[2 ; +\infty[$.

Une valeur arrondie à 10^{-1} près est: $\alpha \approx 2,5,1$.

5. a. Montrons que $I = \frac{1}{2}(\ln 3)^2$:

Soit: $I = \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx$.

$I = \int_0^2 U(x) \times U'(x)\,dx$, avec: $U(x) = \ln(x+1)$

$= \left[\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2\right]_0^2$

$= \frac{1}{2} \times ((\ln 3)^2 - (\ln(1))^2)$

$= \frac{1}{2} \times (\ln 3)^2$.

Nous avons donc bien: $I = \frac{1}{2} \times (\ln 3)^2$.

5. b. Déduisons-en l'aire demandée:

Freemaths : Tous droits réservés

Comme f est continue et positive sur $[0;2]$, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe de f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ est: $\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx$.

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 1 + 4 \times \left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \right) dx$$

$$= \int_0^2 1 \times dx + 4 \times \left(\frac{1}{2} (\ln(3))^2 \right)$$

$$= [x]_0^2 + 2(\ln(3))^2$$

$$= 2 \times (1 + (\ln 3)^2).$$

En unité d'aire, nous avons donc: $\mathcal{A} = 2 \times (1 + (\ln 3)^2)$.

Freemaths : Tous droits réservés