www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

AMÉRIQUE DU NORD
2026

$$f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$ $\quad (5 \times \ln(U) + V)$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- T_f = tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; f(1))$.

1. Conjecturons les intervalles sur lesquels f semble convexe ou concave:

D'après la représentation graphique de la fonction f:

- f semble être convexe sur $]-\infty; 1]$
- f semble être concave sur $[1; +\infty[$.

2. Déterminons, en justifiant, la limite de f en $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \ln(x^2+1) - \lim_{x \to -\infty} 3x$$

$$= +\infty - (-\infty)$$

$$= +\infty + +\infty$$

Freemaths : Tous droits réservés

$= +\infty$.

En effet: • $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = \lim\limits_{X \to +\infty} X = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x = 3 \times \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.

Ainsi la limite de la fonction f en $-\infty$ est: $+\infty$.

3. a. Montrons l'égalité demandée pour tout $x > 0$:

Pour tout $x > 0$: $A = x\left(10\,\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$= 10\ln(x) - 3x + 5\ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right)$

$= 10\ln(x) + 5\ln(x^2 + 1) - 5\ln(x^2) - 3x$

$= 5\ln(x^2) - 5\ln(x^2) + 5\ln(x^2 + 1) - 3x$

$= f(x)$.

Pour tout $x > 0$, l'égalité demandée est bien vérifiée.

3. b. Déterminons la limite de f en $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times \left(10\,\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

Freemaths : Tous droits réservés

Or: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times (10 \times 0 - 3) + 5 \times \lim\limits_{x \to +\infty} \ln (1 + 0)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -3x$

$= -\infty.$

Ainsi la limite de la fonction f en $+\infty$ est: $-\infty$.

4. a. Calculons f' sur $\mathcal{D}f$:

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par conséquent:

$$f'(x) = 5 \times \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right) - 3 \qquad \left(5 \times \left(\frac{u'}{u} \right) + v' \right)$$

$$= \frac{10x}{x^2 + 1} - \frac{3 \times (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons donc bien: $f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 10x - 3}{x^2 + 1}$.

4. b. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}$:

Préalablement notons que: $-3x^2 + 10x - 3 = -3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)(x - 3)$.

D'où le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$, sachant que $x^2 + 1 > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↘	$f\left(\frac{1}{3}\right)$	↗	$f(3)$	↘	$-\infty$

Ainsi: • f est décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty[$

• f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$.

5. a. Validons ou rejetons la conjecture de la question 1.:

D'après l'énoncé: $f''(x) = \dfrac{-10x^2 + 10}{(x^2 + 1)^2}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Et d'après le cours: • f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$

• f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

Or, sachant que $(x^2 + 1)^2 > 0$, nous avons:

• $f''(x) \geqslant 0$ ssi $-10x^2 + 10 \geqslant 0$ cad ssi $x \in [-1; 1]$

• $f''(x) \leqslant 0$ ssi $-10x^2 + 10 \leqslant 0$ cad ssi $x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Au total: • f est convexe sur $[-1; 1]$

• f est concave sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Ainsi, cela permet donc de rejeter la conjecture formulée en 1.

5. b. Déterminons l'équation réduite de T_f:

L'équation réduite de T_f s'écrit:

$$y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A).$$

Or: • $x_A = 1$

• $f(x_A) = 5\ln(2) - 3$

• $f'(x_A) = 2$.

Ainsi l'équation réduite de T_f s'écrit: $y = 2(x - 1) - 3 + 5\ln(2)$

$= 2x - 5 + 5\ln(2)$.

Freemaths : Tous droits réservés

5. c. Déduisons-en que l'inégalité demandée est bien vérifiée:

Ici $x \geq 1$. Dans cet intervalle $[\ 1\ ;+\infty\ [$, f est concave.

$\mathcal{C}_f$ est donc au-dessous de toutes ses tangentes et, en particulier, au-dessous de T_f.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [\ 1\ ;+\infty\ [$, nous pouvons écrire:

$$5 \times \ln(x^2 + 1) - 3x \leq 2x - 5 + 5\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow 5 \times \ln(x^2 + 1) \leq 2x + 3x - 5 + 5\ln(2)$$

cad $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

Au total pour tout $x \in [\ 1\ ;+\infty\ [$, on a bien: $\ln(x^2 + 1) \leq x + \ln(2) - 1$.

Freemaths : Tous droits réservés