www.freemaths.fr

# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 2

## CORRIGÉ EXERCICE 1

# ASIE
# 2026

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$$

# CORRECTION

## PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

### 1. Justifions les éléments du tableau de variation:

Nous savons que: • $f(x) = \frac{x-2}{2x-3}$ $\left(\frac{u}{v}\right)$

• $\mathcal{D}_f = \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$.

• **Sens de variation de la fonction $f$ :**

La fonction $f$ est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et nous avons:

$$f'(x) = \frac{(1) \times (2x-3) - (x-2) \times (2)}{(2x-3)^2}$$

$$\left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ : $f'(x) > 0$.

Ainsi : $f$ est strictement croissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$.

- Les limites de la fonction $f$ en " $-\infty$ " et en " $\frac{3^-}{2}$ " :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \times \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{2x \times \left(1 - \frac{3}{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x}, \quad \text{car} \quad \lim_{x \to -\infty} -\frac{2}{x} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{3}{2x} = 0$$

$$= \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to \frac{3^-}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{3^-}{2}} \frac{x-2}{2x-3}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - 2}{0^-}$$

Freemaths : Tous droits réservés

$$= \frac{-0,5}{0^-}$$

$$= +\infty.$$

Ainsi les limites de $f$ en $-\infty$ et en $\frac{3^-}{2}$ sont respectivement : $\frac{1}{2}$ et $+\infty$.

Nous venons de justifier tous les éléments qui figurent dans le tableau.

2. Déduisons-en que pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \in [0 ; 1]$ :

Si $x \in [0 ; 1]$ : $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

( car $f$ est strictement croissante )

$$\Rightarrow \frac{-2}{-3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1-2}{2-3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

CQFD !

Freemaths : Tous droits réservés

# PARTIE B

## PRÉALABLE:

- $U_{n+1} = \dfrac{U_n - 2}{2\,U_n - 3}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

- $U_0 = 0$.

**1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:**

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

**Initialisation**: Nous savons que $U_0 = 0$ et $U_1 = \dfrac{2}{3}$.

D'où: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$.

**Donc vrai au rang " 0 ".**

**Hérédité**: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ et montrons qu'alors $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$.

Supposons: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

D'où: (1) $\Rightarrow f(0) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(1)$

( f est strictement croissante )

Freemaths : Tous droits réservés

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{2}{3} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 1.$$

**Conclusion**: Pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.

**2. Déduisons-en que la suite $(U_n)$ converge:**

D'après la question précédente: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$.

$$0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} U_{n+1} \geqslant U_n \\ U_n \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite $(U_n)$ est convergente.

**3. Montrons que $\ell = 1$, avec $\ell \in [0; 1]$:**

Comme la suite $(U_n)$ est convergente, elle admet pour limite $\ell$ telle que:

$$\ell = f(\ell).$$

$$\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{\ell - 2}{2\ell - 3} \Leftrightarrow 2\ell^2 - 4\ell + 2 = 0.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Or: $2P^2 - 4P + 2 = 2 \times (P - 1)^2$.

Donc la limite de la suite $(U_n)$ est: $P = 1$.

4. Interprétons cette valeur:

Ici, l'appel *seuil(0.0001)* renvoie la valeur 5000.

Cela signifie que: c'est à partir du rang $n = 5000$ que les termes de la suite dépassent 0, 9999.

5. a. Donnons les quatre premiers termes de la suite $(U_n)$:

Les 4 premiers termes sous forme de fractions irréductibles sont:

- $U_0 = 0$
- $U_1 = \frac{2}{3}$
- $U_2 = \frac{4}{5}$
- $U_3 = \frac{6}{7}$.

5. b. Conjecturons l'expression de $U_n$ en fonction de $n$:

L'expression de $U_n$ en fonction de $n$ est: $U_n = \frac{2n}{2n+1}$.

Freemaths : Tous droits réservés