www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

ASIE
2026

$g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$

CORRECTION

1. a. Montrons que sur $[0 ; 2\pi]$, $g'(x) = -x \sin(x)$:

PRÉALABLE:

- $g(x) = x \cos(x) - \sin(x)$
- $\mathcal{D}g = [0 ; 2\pi]$
- g est dérivable sur $\mathcal{D}g$.

Dans ces conditions pour tout $x \in [0 ; 2\pi]$:

$$g'(x) = [(1) \times (\cos(x)) + (x) \times (-\sin(x))] - \cos(x)$$

$$= \cos(x) - x \sin(x) - \cos(x)$$

$$= -x \sin(x).$$

Ainsi sur $[0 ; 2\pi]$, nous avons bien: $g'(x) = -x \sin(x)$.

1. b. Justifions chacun des éléments du tableau de variations:

- Sens de variation de la fonction g:

Freemaths : Tous droits réservés

• $g'(x) \geqslant 0$ ssi $x \sin(x) \leqslant 0$ cad ssi $\sin(x) \leqslant 0$ ou encore $x \in [\pi ; 2\pi]$,

• $g'(x) \leqslant 0$ ssi $x \sin(x) \geqslant 0$ cad ssi $\sin(x) \geqslant 0$ ou encore $x \in [0 ; \pi]$.

Ainsi: • g est croissante sur $[\pi ; 2\pi]$

• g est décroissante sur $[0 ; \pi]$.

• Les limites de la fonction g en " 0 " et en " 2π ":

• $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0 \times \cos(0) - \sin(0) = 0$,

• $\lim\limits_{x \to 2\pi} g(x) = g(2\pi) = 2\pi \times \cos(2\pi) - \sin(2\pi)$

$= 2\pi \times 1 - 0$

$= 2\pi$.

Ainsi les limites de g en 0 et en 2π sont respectivement: 0 et 2π.

• $g(\pi) = \pi \times \cos(\pi) - \sin(\pi) = \pi \times (-1) - 0 = -\pi$.

Nous venons de justifier tous les éléments qui figurent dans le tableau.

I. c. Montrons que $g(x) = 0$ admet une unique solution " α " sur $[\pi ; 2\pi]$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

Freemaths : Tous droits réservés

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici:
- g est continue sur $[0; 2\pi]$, donc sur $[\pi; 2\pi]$,
- " $k = 0$ " est compris entre: $g(\pi) = -\pi < 0$

  et: $g(2\pi) = 2\pi > 0$,
- g est strictement croissante sur $[\pi; 2\pi]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\pi; 2\pi]$.

Au total, $g(x) = 0$ admet bien une unique solution α sur $[\pi; 2\pi]$.

1. d. Déduisons-en le tableau de signes de " g " sur $[0; 2\pi]$:

Compte tenu de ce que nous avons appris via les questions précédentes, le tableau de signes de la fonction g est:

x	0		α		2π
signe de g	0	$-$	0	$+$	

2. a. Montrons que pour tout $x \in]0; 2\pi]$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$:

D'après l'énoncé: $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, pour tout $x \in]0; 2\pi]$.

Freemaths : Tous droits réservés

$\left(\frac{u}{v}\right)$

f est dérivable sur $]0;2\pi]$, par conséquent:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \times x - \sin(x) \times 1}{x^2} \quad \left(\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}\right)$$

$$= \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}.$$

Ainsi pour tout $x \in]0;2\pi]$, nous avons bien: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

2. b. Étudions le signe de f' sur $]0;2\pi]$:

Sur $]0;2\pi]$: $x^2 > 0$.

Donc le signe de f' dépend uniquement du signe de " g ".

Or, d'après le tableau de signes de " g ", nous avons:

- $g(x) \leqslant 0$ sur $]0;\alpha]$
- $g(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha;2\pi]$.

D'où: • $f'(x) \geqslant 0$ sur $[\alpha;2\pi]$

• $f'(x) \leqslant 0$ sur $]0;\alpha]$.

Freemaths : Tous droits réservés

2. c. Déduisons-en le sens de variation de f sur $]0;2\pi]$:

Compte tenu de la question précédente: • f est décroissante sur $]0;\alpha]$

• f est croissante sur $[\alpha;2\pi]$.

2. d. Déterminons la limite de f en 0^+:

Nous avons: $\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\dfrac{\sin(x)}{x}=f(x)$.

Or, d'après le cours: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0}=\sin'(0)$.

D'où: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\sin'(0)=\cos(0)=1$.

Ainsi: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$.

3. Montrons que $\dfrac{r}{s}<\dfrac{\sin(r)}{\sin(s)}$:

Nous savons que: • $0<r<s<\pi$

• $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;\pi[$.

Sur $]0;\pi[$, nous pouvons donc écrire:

Freemaths : Tous droits réservés

$$0 < r < s < \pi \Rightarrow f(r) > f(s) \Rightarrow \frac{\sin(r)}{r} > \frac{\sin(s)}{s}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}.$$

CQFD!

Freemaths : Tous droits réservés