www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

CENTRES ÉTRANGERS 1

2026

26F424E

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2)$$

CORRECTION

PARTIE A

Freemaths : Tous droits réservés

Associons chacune des fonctions f, f' et f'' à sa courbe représentative :

Nous avons :

- f a pour courbe représentative $\mathcal{C}_1$
- f' a pour courbe représentative $\mathcal{C}_3$
- f'' a pour courbe représentative $\mathcal{C}_2$.

En effet, l'explication réside dans le fait que :

- le signe de f'' donne les variations de f'
- le signe de f'' donne la convexité de f
- le signe de f' donne les variations de f.

PARTIE B

1. Montrons que la fonction " g " est une solution particulière de (E):

Ici: • l'équation différentielle (E) est $y' + y = (2x - 3)\,e^{-x}$

• $g(x) = (x^2 - 3x) \times e^{-x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et:

$$g'(x) = (2x - 3) \times e^{-x} + (x^2 - 3x) \times (-e^{-x})$$

$$= e^{-x} \times (-x^2 + 5x - 3).$$

Dans ces conditions: $g'(x) + g(x) = e^{-x} \times (-x^2 + 5x - 3) + (x^2 - 3x)\,e^{-x}$

$$= e^{-x} \times (2x - 3).$$

D'où la fonction g est bien: une solution particulière de (E).

Notons: $g(x) = h_2(x)$.

2. Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$:

Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ ou $y' = -y$ sont de la forme générale: $h_1(x) = C \cdot e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$. $(a = -1)$

La forme générale des solutions demandées est donc:

$$h_1(x) = C \cdot e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

Freemaths : Tous droits réservés

3. Déduisons-en l'ensemble des solutions de l'équation (E):

Les fonctions solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont:

$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$

$= C \cdot e^{-x} + g(x)$

$= C \cdot e^{-x} + (x^2 - 3x)\, e^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est:

$$h(x) = C \cdot e^{-x} + (x^2 - 3x)\, e^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

4. Déterminons la solution "f" de (E) telle que $f(0) = 2$:

$f(0) = 2 \iff C \cdot e^{-0} + (0^2 - 3 \times 0)\, e^{-0} = 2$ soit $C = 2$.

Ainsi nous trouvons: $f(x) = 2 \times e^{-x} + (x^2 - 3x)\, e^{-x}$.

Ou encore: $f(x) = e^{-x} \times (x^2 - 3x + 2)$.

PARTIE C

1. Étudions le signe de f sur $\mathbb{R}$:

Sur $\mathbb{R}$: $f(x) = e^{-x} \times (x^2 - 3x + 2)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

Freemaths : Tous droits réservés

Donc le signe de la fonction f dépend uniquement du signe de $(x^2 - 3x + 2)$.

Or: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \times (x - 2)$ $(\Delta = 1)$.

D'où le tableau de signes de "f" sur IR suivant:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Freemaths : Tous droits réservés

2. a. Déterminons la limite de la fonction f en $-\infty$:

Notons que: $f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2) = e^{-x} \times x^2 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} \times x^2 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} e^{-x} \times \lim_{x \to -\infty} x^2, \quad \text{car } -\frac{3}{x} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2} \to 0$$

$$= +\infty \times +\infty$$

$$= +\infty.$$

Ainsi: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. b. Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} \times x^2 \times \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x}, \quad \text{car } -\frac{3}{x} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{2}{x^2} \to 0$$

$$= 0, \text{ d'après les croissances comparées.}$$

Ainsi: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. a. Montrons que $I = 1 - \frac{1}{e}$:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-x} \times (x^2 - 3x + 2)\,dx.$$

Procédons à une IPP.

Posons: • $U(x) = x^2 - 3x + 3$, d'où $U'(x) = 2x - 3$

• $V'(x) = e^{-x}$, d'où $V(x) = -e^{-x}$.

Dans ces conditions: $I = [(x^2 - 3x + 2) \times (-e^{-x})]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}(2x - 3)\,dx$

$$= 2 + \int_0^1 -3\,e^{-x}\,dx + \int_0^1 2x\,e^{-x}\,dx$$

$$= 2 + 3 \times [e^{-x}]_0^1 + 2 \times I'$$

$$= 2 + 3 \times (e^{-1} - 1) + 2I'.$$

Freemaths : Tous droits réservés

Procédons à une **IPP** pour le calcul de: $I' = \int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$.

Posons: • $U(x) = x$, d'où $U'(x) = 1$

• $V'(x) = e^{-x}$, d'où $V(x) = -e^{-x}$.

Dans ces conditions: $I' = [-x\, e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx$

$= -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1$

$= -e^{-1} + -e^{-1} + 1$.

Au total: $I = 2 + 3e^{-1} - 3 + 2 \times (-2\, e^{-1} + 1)$

$= 1 - \frac{1}{e}$.

3. b. Interprétation:

I correspond à l'aire, en unité d'aire, de la surface délimitée par:

• la courbe $\mathcal{C}_f$

• l'axe des abscisses

• les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE D

1. Déterminons l'ordonnée du point d'intersection de la tangente (T_a) avec l'axe des ordonnées:

La tangente (T_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse " a " a pour équation:

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a) \iff y = x \times f'(a) - a \times f'(a) + f(a).$$

Or quand (T_a) intersecte l'axe des ordonnées: $x = 0$.

D'où: $y = -a \times f'(a) + f(a)$

$$= -a \times [-e^{-a} \times (a^2 - 3a + 2) + e^{-a} \times (2a - 3)] + e^{-a}(a^2 - 3a + 2)$$

$$= (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a}.$$

Le point d'intersection a donc bien pour ordonnée:

$$y = (a^3 - 4a^2 + 2a + 2)e^{-a}.$$

2. Déterminons le nombre de tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine:

Les tangentes à la courbe passant par l'origine sont telles que:

$$y = 0 \quad \text{cad} \quad a^3 - 4a^2 + 2a + 2 = 0 \quad \text{car} \quad e^{-a} \neq 0.$$

Soit l'équation: $x^3 - 4x^2 + 2x + 2 = 0$.

Cette équation admet **3 solutions**.

Freemaths : Tous droits réservés

Ainsi nous pouvons affirmer que le nombre de tangentes recherché est égal à: 3.

Freemaths : Tous droits réservés