www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 1

2026

$$f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$$

CORRECTION

PRÉALABLE:

- $f(x) = \ln(3x^2 + 2x)$ $\quad (\ln(U))$
- $\mathcal{D}_f = [2 ; +\infty[$
- f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

1. Montrons que f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$:

D'après l'énoncé, f est dérivable sur $[2 ; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in [2 ; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{6x + 2}{3x^2 + 2x}. \qquad \left(\frac{U'}{U}\right)$$

Sur $[2 ; +\infty[$: $6x + 2 \geqslant 14$ **et** $3x^2 + 2x \geqslant 16$.

Donc sur $[2 ; +\infty[$: $f'(x) > 0$.

Freemaths : Tous droits réservés

D'où sur $[2;+\infty[$: f est strictement croissante.

2. a. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution " α " sur l'intervalle $[2;+\infty[$:

Pour tout $x \in [2;+\infty[$: $g(x) = f(x) - x$

$= \ln(3x^2 + 2x) - x.$

La fonction g est dérivable sur $[2;+\infty[$ et nous avons:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{6x+2}{3x^2+2x} - 1$$

$$= \frac{-3x^2+4x+2}{3x^2+2x} < 0.$$

(g strictement décroissante sur $[2;+\infty[$)

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici : • g est continue sur $[2;+\infty[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

et: $g(2) = 2\ln(4) - 2$,

Freemaths : Tous droits réservés

• g est strictement décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x)=0$ ($k=0$) admet bien une unique solution α appartenant à $[\,2\,;+\infty\,[$.

Au total, $g(x)=0$ admet bien une unique solution α sur $[\,2\,;+\infty\,]$.

2. b. Donnons la valeur de α:

La valeur arrondie à 10^{-2} près est: $\alpha \approx 4,05$.

2. c. Déduisons-en le tableau de signes de " g " sur $[\,2\,;+\infty\,[$:

Le tableau de signes de " g " sur $[\,2\,;+\infty\,[$ est:

x	2		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE B

PRÉALABLE:

• $a_{n+1} = \ln(3a^2_n + 2a_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$.

1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ ".

Initialisation: D'après l'énoncé, $2 \leqslant a_0 \leqslant \alpha$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$ et montrons qu'alors $2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$.

Supposons: $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $f(2) \leqslant f(a_n) \leqslant f(\alpha)$

(f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$)

$\Rightarrow$ $\ln(16) \leqslant a_{n+1} \leqslant f(\alpha)$

$\Rightarrow$ $2 \leqslant \ln(16) \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$ **(car: $f(\alpha) = \alpha$)**

$\Rightarrow$ $2 \leqslant a_{n+1} \leqslant \alpha$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $2 \leqslant a_n \leqslant \alpha$.

2. Montrons que la suite (a_n) est croissante:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (a_n) est croissante ssi: $a_{n+1} - a_n > 0$.

Freemaths : Tous droits réservés

$a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n = g(a_n) \geqslant 0$ sur $[2;\alpha]$.

Comme sur $[2;\alpha]$, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$: la suite (a_n) est croissante.

3. Montrons que la suite (a_n) converge:

Comme la suite (a_n) est croissante, nous pouvons écrire:

$$\alpha \geqslant a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 2 \iff \begin{cases} a_{n+1} \geqslant a_n \\ a_n \leqslant \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} (a_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (a_n) \text{ est majorée par } M = \alpha \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (a_n) est convergente et converge vers " ℓ ", $\ell \leqslant \alpha$.

4. Calculons la limite de la suite (a_n):

Comme la suite (a_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$\ell = f(\ell) \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff g(\ell) = 0.$$

Or $g(\ell) = 0$ admet une unique solution: α.

Donc la limite de la suite (a_n) est: $\ell = \alpha$.

PARTIE C

Freemaths : Tous droits réservés

PRÉALABLE:

- $a_{n+1} = \ln(3a_n^2 + 2a_n)$, $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = 2$
- $b_{n+1} = \ln(3b_n^2 + 2b_n)$, $n \in \mathbb{N}$ et $b_0 = 10$
- la suite (a_n) est croissante
- la suite (b_n) est strictement décroissante et converge vers α.

1. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$:

Nous savons que: • la suite (a_n) est majorée par $\alpha \rightarrow a_n \leq \alpha$

• la suite (b_n) est minorée par $\alpha \rightarrow b_n \geq \alpha$.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq \alpha \leq b_n$ cad $a_n \leq b_n$.

2. a. Donnons les valeurs renvoyées par l'instruction algo(2):

Les valeurs renvoyées sont: (9; 4,04), arrondi au millième.

2. b. Interprétation:

Cet algorithme renvoie le 1er rang i pour lequel $b_n - a_n \leq 10^{-f}$ ainsi que les termes a_i.

Le premier rang pour lequel on aura $a_n - b_n \leq 10^{-2}$ est donc: 9 et $a_9 \approx 4,04$.

Freemaths: Tous droits réservés